1. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = 3 - 3t + t^2 \\ y = 6 + 4t - t^2 - t^3 \\ z = 2 - t - t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$
   (a) Stabilire se la curva γ è piana.
   (b) Stabilire se la curva γ è semplice.
   (c) Stabilire se la curva γ è regolare.
   (d) Determinare la retta tangente a γ nel punto P corrispondente a $t = 0$.
   (e) Stabilire se il punto $Q \equiv (1, 2, -4)$ appartiene alla curva γ. In caso affermativo, determinare la retta tangente a γ in Q.
   (f) Determinare il piano osculatore a γ nel punto P corrispondente a $t = 0$.
   (g) Determinare i punti di intersezione della curva γ con il piano coordinato xy.

2. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = \dfrac{1 - t + t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{1 + 2t}{1 + t^2} \\ z = \dfrac{1 + t - t^2}{1 + t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$
   (a) Mostrare che la curva γ è piana e determinare il piano che la contiene.
   (b) Determinare il piano osculatore di γ in un suo generico punto.

3. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t + \mathrm{e}^{2t} \\ y = t - \mathrm{e}^{2t} \\ z = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{t} \end{cases} \qquad t \in [0, 1]\,.$$
   (a) Mostrare che γ è una curva regolare.
   (b) Calcolare la lunghezza di γ.
   (c) Calcolare la massa totale di γ, rispetto alla densità di massa $\delta(t) = t$.
   (d) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma \sqrt{4x^2 + 4y^2 + (x + y)z^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

4. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = \theta\cos\theta - \sin\theta \\ y = \theta\sin\theta + \cos\theta \\ z = \theta^2 \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$
   (a) Stabilire se γ è una curva regolare.
   (b) Calcolare la lunghezza di γ.
   (c) Determinare il baricentro G di γ.

5. Si consideri la curva
$$\gamma:\begin{cases} x = \mathrm{e}^{\theta}\cos\theta + \mathrm{e}^{-\theta}\sin\theta \\ y = \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta - \mathrm{e}^{-\theta}\cos\theta \\ z = \mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta} \end{cases} \qquad \theta\in[0,1]\,.$$
   (a) Mostrare che γ è una curva regolare.
   (b) Calcolare la lunghezza di γ.
   (c) Calcolare la coordinata z del baricentro di γ.
   (d) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma (2x^2 + 2y^2 - z^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

6. Si consideri la curva
$$\gamma:\begin{cases} x = \mathrm{e}^{t^2} \\ y = \mathrm{e}^{t+t^2} \\ z = \mathrm{e}^{t-t^2} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}\,.$$
   (a) Mostrare che γ è una curva regolare.
   (b) Determinare il punto $P_0\in\gamma$ che si ottiene per $t=0$.
   (c) Determinare i versori del riferimento intrinseco di γ nel punto P_0.
   (d) Determinare il piano osculatore a γ nel punto P_0.
   (e) Stabilire se γ è una curva piana.
   (f) Determinare la curvatura, il raggio di curvatura e il centro di curvatura di γ nel punto P_0.

7. Si consideri la curva
$$\gamma:\begin{cases} x = \cos^2\theta \\ y = \sin\theta\cos\theta \\ z = \sin\theta \end{cases} \qquad \theta\in[-\pi,\pi]\,.$$
   (a) Mostrare che γ è una curva sferica.
   (b) Mostrare che γ è una curva chiusa.
   (c) Determinare il punto $P_0\in\gamma$ che si ottiene per $\theta=0$.
   (d) Determinare i versori del riferimento intrinseco di γ nel punto P_0.
   (e) Determinare il piano osculatore a γ nel punto P_0.
   (f) Stabilire se γ è una curva piana.
   (g) Determinare la curvatura, il raggio di curvatura e il centro di curvatura di γ nel punto P_0.
   (h) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma z\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}s\,.$$

8. Si consideri la curva
$$\gamma:\begin{cases} x = 6\,\mathrm{e}^{t} \\ y = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2t} \\ z = 2\,\mathrm{e}^{3t} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}\,.$$
   (a) Mostrare che la curva γ è regolare.
   (b) Determinare la curvatura κ di γ.
   (c) Mostrare che non esistono punti diversi di γ con uguale curvatura.

(d) Determinare i possibili valori della curvatura di γ.

(e) Stabilire se la curva γ è biregolare[1].

(f) Calcolare la curvatura totale di γ, ossia l'integrale di linea generalizzato

$$K = \int_\gamma \kappa \, \mathrm{d}s \,.$$

9. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \operatorname{artg} t \\ y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{1+t^2} \\ z = \sqrt{1+t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \,.$$

(a) Mostrare che la curva γ è regolare.

(b) Mostrare che la curva γ è semplice.

(c) Mostrare che t è il parametro arco di γ (rispetto a un opportuno punto iniziale).

(d) Determinare la curvatura κ di γ.

(e) Determinare i punti di γ in cui la curvatura è massima o minima.

(f) Determinare i possibili valori della curvatura di γ.

[1] Una curva è biregolare quando la curvatura non si annulla mai.

Soluzioni

1. (a) Consideriamo il generico piano $\pi \ : \ ax+by+cz+d=0$ e imponiamo che γ sia contenuta in esso:

$$a(3-3t+t^2)+b(6+4t-t^2-t^3)+c(2-t-t^2)+d=0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$3a+6b+2c+d+(-3a+4b-c)t+(a-b-c)t^2-bt^3=0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$\begin{cases} 3a+6b+2c+d=0 \\ -3a+4b-c=0 \\ a-b-c=0 \\ -b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a+2a+d=0 \\ -3a-a=0 \\ a=c \\ b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0\,. \end{cases}$$

Poiché tutti i coefficienti sono nulli, non esiste alcun piano che contenga la curva γ.

(b) Posto $f(t)=(3-3t+t^2, 6+4t-t^2-t^3, 2-t-t^2)$, si ha

$$\begin{aligned} f(t)=f(u) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3-3t+t^2=3-3u+u^2 \\ 6+4t-t^2-t^3=6+4u-u^2-u^3 \\ 2-t-t^2=2-u-u^2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t^2-u^2-3t+3u=0 \\ t^3-u^3+t^2-u^2-4t+4u=0 \\ t^2-u^2+t-u=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (t-u)(t+u)-3(t-u)=0 \\ (t-u)(t^2+tu+u^2)+(t-u)(t+u)-4(t-u)=0 \\ (t-u)(t+u)+t-u=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (t-u)(t+u-3)=0 \\ (t-u)(t^2+tu+u^2+t+u-4)=0 \\ (t-u)(t+u+1)=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad t=u\,. \end{aligned}$$

Pertanto la funzione f è iniettiva e la curva γ è semplice.

(c) Si ha

$$f'(t)=(-3+2t, 4-2t-3t^2, -1-2t)\,.$$

Poiché $f'(t)=\mathbf{0}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la curva γ è regolare.

(d) Il punto di γ corrispondente a $t=0$ è il punto $P=f(0)\equiv(3,6,2)$. La retta tangente a γ nel punto P ha equazione vettoriale

$$\mathbf{x}=f(0)+f'(0)t\,.$$

Poiché $f'(0)=(-3,4,-1)$, si hanno le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=3-3t \\ y=6+4t \\ z=2-t\,. \end{cases}$$

(e) Si ha

$$
\begin{aligned}
Q \in \gamma \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3 - 3t + t^2 = 1 \\ 6 + 4t - t^2 - t^3 = 2 \\ 2 - t - t^2 = -4 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t^3 + t^2 - 4t - 4 = 0 \\ t^2 + t - 6 = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (t-1)(t-2) = 0 \\ (t+1)(t+2)(t-2) = 0 \\ (t+3)(t-2) = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad t = 2 \,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, il punto $Q \equiv (1, 2, -4)$ appartiene alla curva γ per $t = 2$. Poiché $f'(2) = (1, -12, -5)$, la retta tangente a γ in Q ha equazioni parametriche

$$
\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 12t \\ z = -4 - 5t \,. \end{cases}
$$

(f) Si ha

$$f''(t) = (2, -2 - 6t, -2) \,.$$

Poiché $f'(0) = (-3, 4, -1)$ e $f''(0) = (2, -2, -2)$, il piano osculatore a γ nel punto $P \equiv (3, 6, 2)$ ha equazione

$$
\begin{vmatrix} x - x(0) & y - y(0) & z - z(0) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x''(0) & y''(0) & z''(0) \end{vmatrix} = 0
$$

ossia

$$
\begin{vmatrix} x - 3 & y - 6 & z - 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0
$$

ossia

$$-5(x - 3) - 4(y - 6) - (z - 2) = 0$$

ossia

$$5x + 4y + z - 41 = 0 \,.$$

(g) Per determinare i punti di intersezione della curva γ con il piano coordinato xy basta porre $z(t) = 0$, ossia $t^2 + t - 2 = 0$, da cui si ricava $t = 1, -2$. Si hanno cos\` i punti $A \equiv (1, 8, 0)$ e $B \equiv (13, 2, 0)$.

2. (a) Consideriamo il generico piano $\pi \,:\, ax + by + cz + d = 0$ e imponiamo che γ sia contenuta in esso:

$$a\frac{1 - t + t^2}{1 + t^2} + b\frac{1 + 2t}{1 + t^2} + c\frac{1 + t - t^2}{1 + t^2} + d = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$a(1 - t + t^2) + b(1 + 2t) + c(1 + t - t^2) + d(1 + t^2) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$a + b + c + d + (-a + 2b + c)t + (a - c + d)t^2 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -a+2b+c=0 \\ a-c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2b+c \\ d=c-a=-2b \\ 2b+c+b+c-2b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-3c \\ b=-2c \\ d=-2b=4c\,. \end{cases}$$

Poiché questo sistema ammette almeno una soluzione non nulla (ad esempio: $a=3$, $b=2$, $c=-1$, $d=-4$), esiste un piano che contiene tutti i punti di γ, ossia γ è piana. Il piano che contiene γ è $\pi\ :\ 3x+2y-z-4=0$.

(b) Poiché γ è piana, il piano osculatore in ogni suo punto coincide con il piano che la contiene, ossia con il piano $\pi\ :\ 3x+2y-z-4=0$.

3. (a) Posto $f(t)=(t+\mathrm{e}^{2t}, t-\mathrm{e}^{2t}, 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{t})$, si ha $f'(t)=(1+2\mathrm{e}^{2t}, 1-2\mathrm{e}^{2t}, 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{t})$ e

$$\begin{aligned} ||f'(t)||^2 &= (1+2\mathrm{e}^{2t})^2+(1-2\mathrm{e}^{2t})^2+(2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{t})^2 \\ &= 1+4\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{4t}+1-4\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{4t}+8\mathrm{e}^{2t} \\ &= 2(1+4\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{4t}) \\ &= 2(1+2\mathrm{e}^{2t})^2\,, \end{aligned}$$

ossia

$$||f'(t)||=\sqrt{2}\,(1+2\mathrm{e}^{2t})\,.$$

Poiché $||f'(t)||\neq 0$ per ogni $t\in[0,1]$, la curva γ è regolare.

(b) La lunghezza di γ è

$$L=\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_0^1 ||f'(t)||\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \sqrt{2}\,(1+2\mathrm{e}^{2t})\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\Big[t+\mathrm{e}^{2t}\Big]_0^1=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^2\,.$$

(c) La massa totale di γ, rispetto alla densità di massa $\delta(t)=t$, è

$$M=\int_\gamma \delta\,\mathrm{d}s=\int_0^1 \delta(t)\,||f'(t)||\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^1 t\,(1+2\mathrm{e}^{2t})\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^1 (t+2t\mathrm{e}^{2t})\,\mathrm{d}t\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int 2t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^{2t}-\int \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^{2t}-\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}+c\,.$$

Quindi, risulta

$$M=\sqrt{2}\,\left[\frac{t^2}{2}+t\mathrm{e}^{2t}-\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1=\sqrt{2}\,\left(\frac{1}{2}+\mathrm{e}^2-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\,\left(1+\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)=\frac{2+\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}\,.$$

(d) Sia $F(x,y,z)=\sqrt{4x^2+4y^2+(x+y)z^2}$. Lungo la curva γ, si ha

$$\begin{aligned} F(f(t))^2 &= 4(t+\mathrm{e}^{2t})^2+4(t-\mathrm{e}^{2t})^2+(t+\mathrm{e}^{2t}+t-\mathrm{e}^{2t})\,8\mathrm{e}^{2t} \\ &= 4(t^2+2\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}+t^2-2\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}+4t\mathrm{e}^{2t}) \\ &= 8(t^2+2t\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}) \\ &= 8(t+\mathrm{e}^{2t})^2 \end{aligned}$$

ossia

$$F(f(t))=2\sqrt{2}\,(t+\mathrm{e}^{2t})\,.$$

Pertanto, si ha

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 F(f(t))\,||f'(t)||\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2\sqrt{2}\,(t+\mathrm{e}^{2t})\,\sqrt{2}\,(1+2\mathrm{e}^{2t})\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^1 (t+\mathrm{e}^{2t}+2t\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^{4t})\,\mathrm{d}t \\
&= 4\left[\frac{t^2}{2}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}+t\mathrm{e}^{2t}-\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{4t}}{2}\right]_0^1 \\
&= 4\left[\frac{t^2}{2}+t\mathrm{e}^{2t}+\frac{\mathrm{e}^{4t}}{2}\right]_0^1 \\
&= 4\left(\frac{1}{2}+\mathrm{e}^2+\frac{\mathrm{e}^4}{2}-\frac{1}{2}\right) \\
&= 2(2+\mathrm{e}^2)\,\mathrm{e}^2\,.
\end{aligned}
$$

4. Si ha

$$
\begin{cases}
x' = \cos\theta - \theta\sin\theta - \cos\theta = -\theta\sin\theta \\
y' = \sin\theta + \theta\cos\theta - \sin\theta = \theta\cos\theta \\
z' = 2\theta\,.
\end{cases}
$$

(a) Posto $f(\theta) = (\theta\cos\theta - \sin\theta, \theta\sin\theta + \cos\theta, \theta^2)$, si ha $f'(\theta) = (-\theta\sin\theta, \theta\cos\theta, 2\theta)$ e

$$
||f'(\theta)|| = \sqrt{\theta^2\sin^2\theta + \theta^2\cos^2\theta + 4\theta^2} = \sqrt{\theta^2+4\theta^2} = \sqrt{5}\,|\theta| = \sqrt{5}\,\theta\,.
$$

Pertanto, γ è regolare tranne che nel punto iniziale, corrispondente a $\theta = 0$.

(b) La lunghezza di γ è

$$
L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} ||f'(\theta)||\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\sqrt{5}\,\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\sqrt{5}\,\pi^2\,.
$$

(c) Il baricentro di γ è il punto $G \equiv (x_G, y_G, z_G)$ dove

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{L}\int_\gamma x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} x(\theta)\,||f'(\theta)||\,\mathrm{d}\theta \\
y_G &= \frac{1}{L}\int_\gamma y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} y(\theta)\,||f'(\theta)||\,\mathrm{d}\theta \\
z_G &= \frac{1}{L}\int_\gamma z\,\mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} z(\theta)\,||f'(\theta)||\,\mathrm{d}\theta\,.
\end{aligned}
$$

Per la prima coordinata, si ha

$$
x_G = \frac{1}{2\sqrt{5}\,\pi^2}\int_0^{2\pi} (\theta\cos\theta - \sin\theta)\,\sqrt{5}\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} (\theta^2\cos\theta - \theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.
$$

Integrando per parti, si ha

$$
\begin{aligned}
&\int \theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\theta\cos\theta + \int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta + c \\
&\int \theta^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \theta^2\sin\theta - 2\int \theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \theta^2\sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta + c\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, risulta

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{2\pi^2}\Big[\theta^2\sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta + \theta\cos\theta - \sin\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\Big[\theta^2\sin\theta + 3\theta\cos\theta - 3\sin\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{6\pi}{2\pi^2} = \frac{3}{\pi}\,. \end{aligned}$$

Per la seconda coordinata, si ha

$$y_G = \frac{1}{2\sqrt{5}\,\pi^2}\int_0^{2\pi}(\theta\sin\theta + \cos\theta)\,\sqrt{5}\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}(\theta^2\sin\theta + \theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \theta\sin\theta - \int\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \theta\sin\theta + \cos\theta + c$$

$$\int\theta^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\int\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\theta\sin\theta + 2\cos\theta + c\,.$$

Pertanto, risulta

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{2\pi^2}\Big[-\theta^2\cos\theta + 2\theta\sin\theta + 2\cos\theta + \theta\sin\theta + \cos\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\Big[-\theta^2\cos\theta + 3\theta\sin\theta + 3\cos\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi^2}{2\pi^2} = -2\,. \end{aligned}$$

Infine, per l'ultima coordinata, si ha

$$z_G = \frac{1}{2\sqrt{5}\,\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta^2\,\sqrt{5}\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\theta^3\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\theta^4}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{16\pi^4}{4} = 2\pi^2\,.$$

Pertanto, il baricentro di γ è

$$G \equiv \left(\frac{3}{\pi}, -2, 2\pi^2\right).$$

5. (a) Si hanno le derivate

$$\begin{aligned} x' &= \mathrm{e}^{\theta}\cos\theta - \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta - \mathrm{e}^{-\theta}\sin\theta + \mathrm{e}^{-\theta}\cos\theta \\ &= (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})\cos\theta - (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})\sin\theta \\ &= (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})(\cos\theta - \sin\theta) \\ y' &= \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta + \mathrm{e}^{\theta}\cos\theta + \mathrm{e}^{-\theta}\cos\theta + \mathrm{e}^{-\theta}\sin\theta \\ &= (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})\sin\theta + (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})\cos\theta \\ &= (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})(\cos\theta + \sin\theta) \\ z' &= \mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}\,. \end{aligned}$$

Poiché $z' \neq 0$ per ogni $\theta \in [0,1]$, si ha $f'(\theta) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\theta \in [0,1]$, ossia si ha che la curva γ è regolare.

(b) Si ha

$$||f'(\theta)||^2 = (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})^2[(\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2 + 1] = 3\,(\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})^2$$

ossia

$$||f'(\theta)|| = \sqrt{3}\,(\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}) = 2\sqrt{3}\,\cosh\theta\,.$$

Pertanto, la lunghezza di γ è

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 ||f'(\theta)||\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{3}\int_0^1\cosh\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{3}\Big[\sinh\theta\Big]_0^1 = 2\sqrt{3}\sinh 1 = \sqrt{3}(\mathrm{e}{+}\mathrm{e}^{-1})\,.$$

(c) La coordinata z del baricentro di γ è

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{L}\int_\gamma z\mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^1 z(\theta)\,||f'(\theta)||\;\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{L}\int_0^1 (\mathrm{e}^\theta-\mathrm{e}^{-\theta})(\mathrm{e}^\theta+\mathrm{e}^{-\theta})\;\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{L}\int_0^1 (\mathrm{e}^{2\theta}-\mathrm{e}^{-2\theta})\;\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\theta}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-2\theta}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}\left(\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}}{2}-1\right). \end{aligned}$$

(d) Lungo la curva γ, si ha

$$\begin{aligned} 2x^2+2y^2-z^2 &= 2(\mathrm{e}^\theta\cos\theta+\mathrm{e}^{-\theta}\sin\theta)^2+2(\mathrm{e}^\theta\sin\theta-\mathrm{e}^{-\theta}\cos\theta)^2-(\mathrm{e}^\theta-\mathrm{e}^{-\theta})^2 \\ &= 2\mathrm{e}^{2\theta}+2\mathrm{e}^{-2\theta}-\mathrm{e}^{2\theta}+2-\mathrm{e}^{-2\theta} \\ &= \mathrm{e}^{2\theta}+\mathrm{e}^{-2\theta}+2\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (\mathrm{e}^{2\theta}+\mathrm{e}^{-2\theta}+2)\,||f'(\theta)||\;\mathrm{d}\theta = \sqrt{3}\,\int_0^1 (\mathrm{e}^{2\theta}+\mathrm{e}^{-2\theta}+2)\,(\mathrm{e}^\theta+\mathrm{e}^{-\theta})\;\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{3}\,\int_0^1 (\mathrm{e}^{3\theta}+3\mathrm{e}^{\theta}+3\mathrm{e}^{-\theta}+\mathrm{e}^{-3\theta})\;\mathrm{d}\theta = \sqrt{3}\,\left[\frac{\mathrm{e}^{3\theta}}{3}+3\mathrm{e}^\theta-3\mathrm{e}^{-\theta}-\frac{\mathrm{e}^{-3\theta}}{3}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{3}\,\left(\frac{\mathrm{e}^3}{3}+3\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1}-\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3}\right) = \frac{\mathrm{e}^6+9\mathrm{e}^4-9\mathrm{e}^2-1}{\sqrt{3}\,\mathrm{e}^3}\,. \end{aligned}$$

6. Si ha

$$\begin{cases} x' = 2t\mathrm{e}^{t^2} \\ y' = (1+2t)\mathrm{e}^{t+t^2} \\ z' = (1-2t)\mathrm{e}^{t-t^2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2(1+2t^2)\mathrm{e}^{t^2} \\ y'' = 2\mathrm{e}^{t+t^2}+(1+2t)^2\mathrm{e}^{t+t^2} \\ z'' = -2\mathrm{e}^{t-t^2}+(1-2t)^2\mathrm{e}^{t-t^2}\,. \end{cases}$$

Inoltre, sia $f(t) = (\mathrm{e}^{t^2},\mathrm{e}^{t+t^2},\mathrm{e}^{t-t^2})$, per ogni $t\in\mathbb{R}$.

(a) Poiché x', y' e z' non si annullano mai simultaneamente, la curva γ è regolare.

(b) Per $t=0$, si ha $P_0 \equiv f(0) = (1,1,1)$.

(c) Si ha $f'(0) = (0,1,1)$ e $f''(0) = (2,3,-1)$. Il versore tangente in P_0 è

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{||f'(0)||} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Poiché

$$f'(0)\wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4,2,-2) = 2(-2,1,-1)$$

e

$$||f'(0)\wedge f''(0)|| = 2\sqrt{6}\,,$$

il versore binormale in P_0 è

$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0)\wedge f''(0)}{||f'(0)\wedge f''(0)||} = \frac{2(-2,1,-1)}{2\sqrt{6}} = \frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}\,.$$

Infine, il versore normale in P_0 è

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0)\wedge\mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,(2,2,-2) = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{3}}\,.$$

(d) L'equazione cartesiana del piano osculatore a γ nel punto P_0 è

$$\begin{vmatrix} x-x(0) & y-y(0) & z-z(0) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x''(0) & y''(0) & z''(0) \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si ha così l'equazione $2x - y + z - 2 = 0$.

(e) Se γ fosse una curva piana, il piano osculatore sarebbe costante lungo tutta γ. Quindi, tutti i punti di γ dovrebbero appartenere al piano $\pi \ : \ 2x - y + z - 2 = 0$, trovato nel punto precedente. Questo, tuttavia, non avviene. Consideriamo, ad esempio, il punto $P_1 \equiv (\mathrm{e}, \mathrm{e}^2, 1) \in \gamma$ che si ottiene per $t = 1$. Sostituendo le coordinate di P_1 nell'equazione di π, si ottiene $(\mathrm{e}-1)^2 = 0$ e questo è falso, poiché $\mathrm{e} \neq 1$. Quindi $P_1 \notin \pi$ e γ non è piana.

(f) La curvatura di γ nel punto P_0 è

$$\kappa(0) = \frac{||f'(0) \wedge f''(0)||}{||f'(0)||^3} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}\,.$$

Pertanto, il raggio di curvatura in P_0 è

$$r(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e il centro di curvatura in P_0 è

$$C(0) = f(0) + r(0)\,\mathbf{n}(0) = (1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

7. Si ha

$$\begin{cases} x' = -2\sin\theta\cos\theta \\ y' = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ z' = \cos\theta \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta \\ y'' = -4\sin\theta\cos\theta \\ z'' = -\sin\theta \end{cases}.$$

Inoltre, sia $f(\theta) = (\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta, \sin\theta)$, per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(a) Poiché

$$x^2+y^2+z^2 = \cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta = \cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\sin^2\theta = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1\,,$$

la curva γ giace sulla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e quindi è sferica.

(b) Poiché $f(-\pi) = (1,0,0) = f(\pi)$, la curva γ è chiusa.

(c) Si ha $P_0 \equiv f(0) = (1,0,0)$.

(d) Si ha $f'(0) = (0,1,1)$ e $f''(0) = (-2,0,0)$. Il versore tangente in P_0 è

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{||f'(0)||} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Poiché

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-2,2) = 2(0,-1,1)$$

e

$$||f'(0) \wedge f''(0)|| = 2\sqrt{2}\,,$$

il versore binormale in P_0 è

$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{||f'(0) \wedge f''(0)||} = \frac{2(0,-1,1)}{2\sqrt{2}} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}.$$

Infine, il versore normale in P_0 è

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2,0,0) = (-1,0,0).$$

(e) Il piano osculatore a γ nel punto P_0 ha equazione

$$\langle \mathbf{b}(0), X - P_0 \rangle = 0$$

ossia

$$\langle (0,-1,1), (x-1,y,z) \rangle = 0$$

ossia $y - z = 0$.

(f) Se γ fosse una curva piana, tutti i suoi punti dovrebbero appartenere al piano osculatore trovato nel punto precedente, e questo non accade. Infatti, il punto $f(\pi/2) = (0,-1,0) \in \gamma$ non appartiene a tale piano. Quindi γ non è piana.

(g) La curvatura di γ nel punto P_0 è

$$\kappa(0) = \frac{||f'(0) \wedge f''(0)||}{||f'(0)||^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1.$$

Pertanto, il raggio di curvatura in P_0 è

$$r(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = 1$$

e il centro di curvatura in P_0 è

$$C(0) = f(0) + r(0)\,\mathbf{n}(0) = (1,0,0) + (-1,0,0) = (0,0,0).$$

(h) Si ha

$$\begin{aligned} ||f'(\theta)||^2 &= 4\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta + \cos^2\theta \\ &= \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta + \cos^2\theta \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 + \cos^2\theta \\ &= 1 + \cos^2\theta \end{aligned}$$

ossia

$$||f'(\theta)|| = \sqrt{1 + \cos^2\theta}.$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} z(\theta)\sqrt{1 + x(\theta)}\; ||f'(\theta)||\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\;\sqrt{1+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta(1+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin\theta + \sin\theta\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left[-\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

8. Si ha

$$\begin{cases} x' = 6\,\mathrm{e}^t \\ y' = 6\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2t} \\ z' = 6\,\mathrm{e}^{3t} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 6\,\mathrm{e}^t \\ y'' = 12\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2t} \\ z'' = 18\,\mathrm{e}^{3t}\,. \end{cases}$$

(a) Posto $f(t) = (\mathrm{e}^t, 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2t}, 2\,\mathrm{e}^{3t})$, si ha $f'(t) = 6\mathrm{e}^t\,(1, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{2t})$. Poiché $f'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, γ è regolare.

(b) Si ha

$$||f'(t)|| = 6\mathrm{e}^t\sqrt{1 + 2\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{4t}} = 6\mathrm{e}^t(1 + \mathrm{e}^{2t})\,.$$

Inoltre, essendo $f''(t) = 6\mathrm{e}^t(1, 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t, 3\,\mathrm{e}^{2t})$, si ha

$$\begin{aligned} f'(t) \wedge f''(t) &= (6\mathrm{e}^t)^2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t & 3\,\mathrm{e}^{2t} \end{vmatrix} \\ &= 36\,\mathrm{e}^{2t}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3t}, -2\mathrm{e}^{2t}, \sqrt{2}\mathrm{e}^t) = 36\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3t}\,(\mathrm{e}^{2t}, -\sqrt{2}\mathrm{e}^t, 1) \end{aligned}$$

e

$$||f'(t) \wedge f''(t)|| = 36\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3t}\,\sqrt{\mathrm{e}^{4t} + 2\mathrm{e}^{2t} + 1} = 36\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3t}\,(1 + \mathrm{e}^{2t})\,.$$

Pertanto, la curvatura di γ è

$$\kappa(t) = \frac{||f'(t) \wedge f''(t)||}{||f'(t)||^3} = \frac{36\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3t}\,(1 + \mathrm{e}^{2t})}{6^3\mathrm{e}^{3t}(1 + \mathrm{e}^{2t})^3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\frac{1}{(1 + \mathrm{e}^{2t})^2}\,.$$

(c) Poiché

$$\kappa'(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{\mathrm{e}^{2t}}{(1 + \mathrm{e}^{2t})^3} < 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, la funzione κ è strettamente decrescente e quindi è iniettiva (ossia punti diversi di γ hanno diversa curvatura).

(d) Poiché κ è una funzione continua strettamente decrescente e

$$\lim_{t \to -\infty} \kappa(t) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to +\infty} \kappa(t) = 0\,,$$

si ha che la sua immagine è l'intervallo $(0, \frac{1}{3\sqrt{2}})$, ossia

$$0 < \kappa(t) < \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}\,.$$

(e) Poiché $\kappa(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la curva γ è biregolare.

(f) Si ha

$$K = \int_\gamma \kappa\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(t)\,||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6\mathrm{e}^t(1 + \mathrm{e}^{2t})}{3\sqrt{2}(1 + \mathrm{e}^{2t})^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Posto $u = \mathrm{e}^t$, si ha $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ossia $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, e

$$K = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{u}{1 + u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \sqrt{2}\,\Big[\operatorname{artg} u\Big]_0^{+\infty} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

9. Si ha

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1 + t^2} \\ y' = -\dfrac{t}{1 + t^2} \\ z' = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = -\dfrac{2t}{(1 + t^2)^2} \\ y'' = -\dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} \\ z'' = \dfrac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}\,. \end{cases}$$

(a) Si ha

$$||f'(t)||^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2} = 1$$

ossia $||f'(t)|| = 1$. Pertanto la curva γ è regolare.

(b) Poiché la prima coordinata $x(t) = \operatorname{artg} t$ è data da una funzione iniettiva, è iniettiva anche la funzione $f(t)$ che parametrizza γ, ossia γ è semplice.

(c) Scelto il punto $P_0 = f(0) = (0,0,1) \in \gamma$ che si ottiene per $t_0 = 0$, il parametro arco di γ è

$$s = \int_{t_0}^{t} ||f'(u)||\, \mathrm{d}u = \int_0^t \mathrm{d}u = t\,.$$

(d) Poiché t è il parametro arco di γ, la curvatura di γ è data da

$$\kappa(t) = ||\mathbf{t}'|| = ||f''(t))|| = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^4} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{1}{(1+t^2)^3}} = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^3}}$$

ossia

$$\kappa(t) = \sqrt{\frac{2+t^2}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\frac{2+t^2}{1+t^2}}\,.$$

(e) Si ha

$$\begin{aligned}
\kappa'(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+t^2)^3}{2+t^2}}\ \frac{2t(1+t^2)^3 - 3(1+t^2)^2 2t(2+t^2)}{(1+t^2)^6} \\
&= \sqrt{\frac{(1+t^2)^3}{2+t^2}}\ \frac{t(1+t^2) - 3t(2+t^2)}{(1+t^2)^4} \\
&= \sqrt{\frac{1+t^2}{2+t^2}}\ \frac{t(1+t^2-6-3t^2)}{(1+t^2)^3} \\
&= -\frac{t(5+2t^2)}{(1+t^2)^3}\ \sqrt{\frac{1+t^2}{2+t^2}}\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\kappa'(t) \geq 0$ sse $t \leq 0$, la curvatura di γ assume valore massimo per $t \leq 0$, ossia nel punto $P_0 = f(0) = (0,0,1)$.

(f) Poiché κ è una funzione continua pari che ammette valore massimo $\kappa(0) = \sqrt{2}$ e

$$\lim_{t\to-\infty} \kappa(t) = \lim_{t\to+\infty} \kappa(t) = 0\,,$$

si ha che la sua immagine è l'intervallo $(0, \sqrt{2}]$.