1. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$
   (a) mostrare che possiede esattamente una soluzione;
   (b) calcolarne la soluzione.

2. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (x\sin x)\,y^2 \\ y(\pi) = 1\,, \end{cases}$$
   (a) dire se ammette una e una sola soluzione;
   (b) determinarne la soluzione.

3. (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y' = 2x\,\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\,.$$
   (b) Dire per quali valori delle condizioni iniziali (x_0, y_0) il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 2x\,\frac{\sqrt{1+y^2}}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
   ammette una e una sola soluzione.
   (c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy relativo alla condizione iniziale $x_0 = 0$ e $y_0 = -\sqrt{3}$, e determinare il massimo intervallo su cui tale soluzione può essere estesa.
   (d) Determinare la soluzione del problema di Cauchy relativo alla condizione iniziale $x_0 = 2$ e $y_0 = \sqrt{15}$, e determinare il massimo intervallo su cui tale soluzione può essere estesa.

4. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = x\sin y \\ y(1) = \frac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$
   (a) mostrare che ammette una e una sola soluzione f;
   (b) scrivere lo sviluppo di Taylor di f, troncato al terzo ordine, nel punto $x_0 = 1$.

Soluzioni

1. (a) L'equazione differenziale data è a variabili separabili, con $a(x) = x$ e $b(y) = \sqrt{y}$. La funzione $a(x)$ è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = 1$. Quindi, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione.

   (b) Integrando, si ottiene $y(x) = \frac{(x^2+4)^2}{16}$.

2. (a) L'equazione differenziale data è a variabili separabili, con $a(x) = x \sin x$ e $b(y) = y^2$. La funzione $a(x)$ è continua in un intorno di $x_0 = \pi$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = 1$. Quindi, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione.

   (b) Le soluzioni stazionarie si ottengono risolvendo l'equazione $b(y) = 0$. Quindi abbiamo solo una soluzione stazionaria, data da $y(x) = 0$. Poiché questa funzione non è la soluzione del problema di Cauchy assegnato, separiamo le variabili ed integriamo. Si ha
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x \sin x \, \mathrm{d}x$$
ossia
$$-\frac{1}{y} = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + c$$
dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria di integrazione. L'integrale generale è pertanto dato da
$$y(x) = \frac{1}{x \cos x - \sin x - c}.$$
Imponendo la condizione iniziale $y(\pi) = 0$, si ottiene $c = -\pi - 1$. Pertanto, la soluzione cercata è
$$y(x) = \frac{1}{x \cos x - \sin x + \pi + 1}.$$

3. (a) Non ci sono soluzioni stazionarie. Separiamo le variabili e integriamo:
$$\frac{1}{2} \int \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} \, \mathrm{d}y = \int 2x \, \mathrm{d}x.$$
Si ha
$$\sqrt{1+y^2} = x^2 + c$$
dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria di integrazione. Pertanto, l'integrale generale è
$$y(x) = \pm\sqrt{(x^2+c)^2 - 1}.$$

   (b) Si ha un'equazione differenziale a variabili separabili, con $a(x) = 2x$ e $b(y) = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$. La funzione $a(x)$ è continua in un intorno di ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq 0$ (poiché $b'(y) = -\frac{1}{y^2\sqrt{1+y^2}}$). Quindi, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq 0$.

(c) Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -\sqrt{3}$, si ha $\sqrt{1+3} = c$, ossia $c = 2$. Poiché $y(0) = -\sqrt{3} < 0$, la soluzione cercata è

$$y(x) = -\sqrt{(x^2+2)^2 - 1}\,.$$

Poiché $(x^2+2)^2 - 1 = x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Quindi, la soluzione trovata si può estendere a tutto $\mathbb{R}$.

(d) Imponendo la condizione iniziale $y(2) = \sqrt{15}$, si ha $\sqrt{1+15} = 4+c$, ossia $c = 0$. Poiché $y(2) = \sqrt{15} > 0$, la soluzione cercata è

$$y(x) = \sqrt{x^4 - 1}\,.$$

Questa funzione è definita per $x^4 - 1 = (x^2+1)(x-1)(x+1) > 0$, ossia per $x \leq -1$ o $x \geq 1$. Inoltre è derivabile solo per $x < -1$ o $x > 1$. Quindi, poiché $x_0 = 2 > 1$, la soluzione trovata si può estendere solo all'intervallo $(1, +\infty)$.

4. (a) L'equazione differenziale data è a variabili separabili, con $a(x) = x$ e $b(y) = \sin y$. La funzione $a(x)$ è continua in un intorno di $x_0 = 1$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = \frac{\pi}{2}$. Quindi, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione f.

(b) Utilizzando l'equazione differenziale data, si ha

$$\begin{aligned}
&f'(x) = x \sin f(x) \\
&f''(x) = \sin f(x) + x f'(x) \cos f(x) \\
&f'''(x) = 2f'(x) \cos f(x) + x f''(x) \cos f(x) - x f'(x)^2 \sin f(x)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, usando la condizione iniziale data, si ha

$$\begin{aligned}
&f(1) = \frac{\pi}{2} \\
&f'(1) = \sin f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\
&f''(1) = \sin f(1) + f'(1) \cos f(1) = 1 \\
&f'''(1) = 2f'(1) \cos f(1) + f''(1) \cos f(1) - f'(1)^2 \sin f(1) = -1\,.
\end{aligned}$$

Poiché per $x \to 1$ si ha

$$f(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}\,(x-1)^3 + o((x-1)^3)\,,$$

lo sviluppo richiesto è

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + (x-1) + \frac{1}{2}\,(x-1)^2 - \frac{1}{6}\,(x-1)^3 + o((x-1)^3)\,.$$