Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello, 12 Luglio 2010**

Cognome: ______________________
Nome: ______________________
Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 12 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Es. 5**: 3 punti	**Totale**

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \arctan x}{(e^{-x} - 1 + x)^\alpha}\,.$$

2. Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{2}\,\sqrt{4 - x^2}\,.$$

(Dominio di f, eventuali simmetrie, segno di f, limiti agli estremi, eventuali asintoti, derivata prima, derivabilità di f, dire se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI, derivata seconda, convessità e concavità, grafico di f.)

3. Si consideri l'equazione differenziale, dipendente dal parametro reale k,

$$y'(t) = -3ty(t) + kt.$$

   (a) Determinare la soluzione che si annulla nell'origine.

   (b) Relativamente a questa soluzione, determinare k in modo che

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t^2} = 1.$$

4. Studiare, al variare del parametro reale β, la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)\arctan x}{(2+x)^\beta}\,\mathrm{d}x\,.$$

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzioni del compito A

1. Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin opportuni, si hanno le relazioni di asintoticità

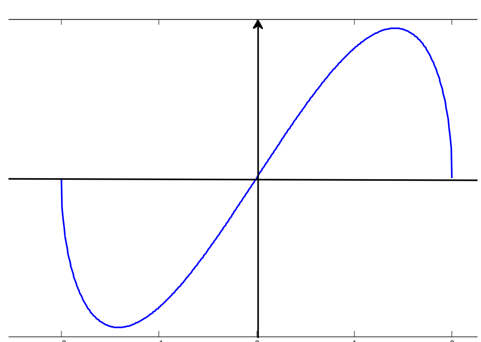
$$\sin x - \arctan x \sim x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{6}$$

$$e^{-x} - 1 + x \sim \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 1 + x = \frac{x^2}{2}$$

per $x \to 0$. Di conseguenza, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \arctan x}{(e^{-x} - 1 + x)^\alpha} = \frac{2^\alpha}{6} \lim_{x\to 0^+} x^{3-2\alpha} = \begin{cases} 0^+, & \text{se } \alpha < \frac{3}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{3}, & \text{se } \alpha = \frac{3}{2}, \\ +\infty, & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. (a) Dominio di f: $D(f) = [-2, 2]$. Si osservi che la funzione dispari, restringiamo quindi lo studio all'intervallo $[0, 2]$.
   (b) Limiti agli estremi: $f(0) = f(2) = 0$
   (c) Eventuali asintoti: Nessun asintoto.
   (d) Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$
   (e) Discutere la derivabilit di f: $D(f') = [0, 2)$. Inoltre, $\lim_{x\longrightarrow 2^-} f'(x) = -\infty$.
   (f) Studio del segno di f: $f > 0$ in $(0, 2)$, $f(0) = f(2) = 0$.
   (g) Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI: f ha un punto di massimo assoluto in $x = \sqrt{2}$.
   (h) Derivata seconda: $f''(x) = \frac{x(x^2 - 6)}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} \qquad x \in [0, 2)$.
   (i) Studio della convessità e della concavità: $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 2)$ e $f''(0) = 0$. Quindi f concava in $(0, 2)$ e $x = 0$ un punto di flesso per f.
   (j) Grafico di f:



3. Si tratta di un'equazione differenziale lineare, il cui integrale generale è

$$y = \mathrm{e}^{-3\int t\mathrm{d}t} \int \mathrm{e}^{3\int t\mathrm{d}t} kt\mathrm{d}t = \frac{k}{3} + c\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t^2} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$, si ha

$$0 = \frac{k}{3} + c,$$

da cui $c = -k/3$. La soluzione cercata è quindi

$$y(t) = \frac{k}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t^2}\right).$$

Utilizzando (lo sviluppo della funzione esponenziale, oppure) il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{k}{3}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t^2}}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{3}{2}\frac{k}{3}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t^2}}{-\frac{3}{2}t^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{k}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t^2} - 1}{\frac{3}{2}t^2}\right) = \frac{k}{2}.$$

Quindi,

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = 2.$$

4. La funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Inoltre, non presenta singolarità per $x \to 0^+$. Di conseguenza è possibile applicare il criterio del confronto asintotico, nel caso $x \to +\infty$. Utilizzando la relazione $(1+t)^\alpha \sim 1+\alpha t$ per $t \to 0$ e per ogni α, abbiamo

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x} = x^{1/3}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right] \sim x^{1/3}\left(1 + \frac{1}{3x} - 1\right) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Poiché valgono anche le relazioni

$$(2+x)^\beta \sim x^\beta \qquad \text{e} \qquad \arctan x \sim \frac{\pi}{2}$$

per $x \to +\infty$, infine si ha

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)\arctan x}{(2+x)^\beta} \sim \frac{\pi}{6}x^{-2/3-\beta}$$

per $x \to +\infty$. Tale integrale converge se, e solo se, $\beta > \frac{1}{3}$.

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello, 12 Luglio 2010**

Cognome: ________________________
Nome: ________________________
Matricola: ________________________

Compito B

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 12 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Es. 5**: 3 punti	**Totale**

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, il valore del limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \arctan x}\,.$$

2. Studiare la funzione definita da
$$f(x) = -\frac{x}{3}\sqrt{9 - x^2}$$
(Dominio di f, eventuali simmetrie, segno di f, limiti agli estremi, eventuali asintoti, derivata prima, derivabilità di f, dire se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI, derivata seconda, convessità e concavità, grafico di f.)

3. Si consideri l'equazione differenziale, dipendente dal parametro reale k,
$$y'(t) = -5ty(t) + kt.$$
   (a) Determinare la soluzione che si annulla nell'origine.
   (b) Relativamente a questa soluzione, determinare k in modo che
$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t^2} = -1\,.$$

4. Studiare, al variare del parametro reale β, la convergenza dell'integrale improprio
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}\right)\arctan x}{(3+x)^\beta}\,\mathrm{d}x\,.$$

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzioni del compito B

1. Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin opportuni, si hanno le relazioni di asintoticità

$$e^x - 1 - x \sim \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - 1 - x = \frac{x^2}{2}$$

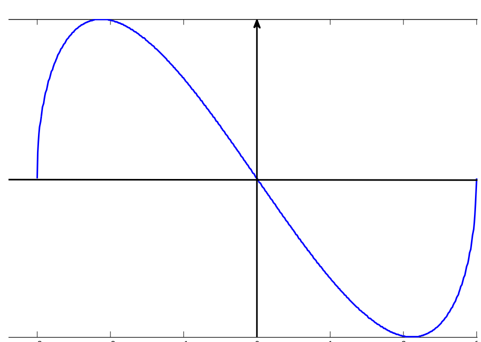
$$\sin x - \arctan x \sim x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{6}$$

per $x \to 0$. Di conseguenza, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \arctan x} = \frac{6}{2^\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{-3+2\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{\sqrt{2}}, & \text{se } \alpha = \frac{3}{2}, \\ 0^+, & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. (a) Dominio di f: $D(f) = [-3, 3]$. Si osservi che la funzione dispari, restringiamo quindi lo studio all'intervallo $[0, 3]$.
   (b) Limiti agli estremi: $f(0) = f(3) = 0$
   (c) Eventuali asintoti: Nessun asintoto.
   (d) Derivata prima: $f'(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2} + \frac{x^2}{3\sqrt{9 - x.^2}} = \frac{2x^2 - 9}{3\sqrt{9 - x^2}}$
   (e) Discutere la derivabilit di f: $D(f') = [0, 3)$. Inoltre, $\lim_{x\longrightarrow 3^-} f'(x) = +\infty$.
   (f) Studio del segno di f: $f < 0$ in $(0, 3)$, $f(0) = f(3) = 0$.
   (g) Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI: f ha un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{3}/2$.
   (h) Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{x(27 - 2x^2)}{3(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}} \qquad x \in [0, 3)$.
   (i) Studio della convessità e della concavità: $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 3)$ e $f''(0) = 0$. Quindi f è convessa in $(0, 3)$ e $x = 0$ è un punto di flesso per f.

   (j) Grafico di f:



3. Si tratta di un'equazione differenziale lineare il cui integrale generale è

$$y(t) = \mathrm{e}^{-5\int t\mathrm{d}t} \int \mathrm{e}^{5\int t\mathrm{d}t} kt\mathrm{d}t = \frac{k}{5} + c\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ si ha

$$0 = \frac{k}{5} + c,$$

da cui $c = -k/5$. La soluzione cercata è quindi

$$y(t) = \frac{k}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2}\right).$$

Utilizzando (lo sviluppo della funzione esponenziale, oppure) il limite notevole

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{k}{5}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2}}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{5}{2}\frac{k}{5}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2}}{-\frac{5}{2}t^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{k}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2} - 1}{\frac{5}{2}t^2}\right) = \frac{k}{2}.$$

Quindi,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k = -2.$$

4. La funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Inoltre, non presenta singolarità per $x \to 0^+$. Di conseguenza è possibile applicare il criterio del confronto asintotico nel caso $x \to +\infty$. Utilizzando la relazione $(1+t)^\alpha \sim 1 + \alpha t$ per $t \to 0$ e per ogni α, si ha

$$\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{x} = x^{1/4}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/4} - 1\right] \sim x^{1/4}\left(1 + \frac{1}{4x} - 1\right) = \frac{1}{4}x^{-3/4}.$$

Poiché valgono anche le relazioni

$$(3+x)^\beta \sim x^\beta \qquad \text{e} \qquad \arctan x \sim \frac{\pi}{2}$$

per $x \to +\infty$, infine si ha

$$\frac{\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}\right)\arctan x}{(3+x)^\beta} \sim \frac{\pi}{8}x^{-3/4-\beta}$$

per $x \to +\infty$. Tale integrale converge se, e solo se, $\beta > \frac{1}{4}$.