Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Seconda prova in itinere – 31 gennaio 2011**

Compito A

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 8 punti	**Es. 4**: 8 punti	**Es. 5**: 2 punti	**Totale**

1. Sia $P \equiv (2,1,-1)$ e sia r la retta di equazioni parametriche
$$r \ : \begin{cases} x = -1+3t \\ y = -t \\ z = 2+t\,. \end{cases}$$
   (a) Rappresentare in forma cartesiana il piano π che contiene r e passa per P.
   (b) Rappresentare in forma parametrica la retta s che passa per P, è contenuta in π ed è ortogonale a r.

2. Data la curva
$$\gamma \ : \begin{cases} x = t^4+t^2-t \\ y = t^5+t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$
   (a) stabilire se γ è semplice;
   (b) determinare il versore tangente $\mathbf{t}$ nel punto $O \equiv (0,0)$;
   (c) determinare il versore normale $\mathbf{n}$ nel punto $O \equiv (0,0)$;
   (d) determinare l'equazione della circonferenza osculatrice nel punto $O \equiv (0,0)$.

3. **(a)** Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) = -\frac{2}{x}\,y(x) + 4x\,.$$
   (b) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{2}{x}\,y(x)+4x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
   specificando l'intervallo massimale sul quale la soluzione può essere estesa.

4. Dato l'integrale improprio
$$\int_0^{64} \frac{1}{x^\alpha(\sqrt[3]{x}-9)}\,dx,$$
   (a) determinare per quali valori di α esso converge;
   (b) calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni del compito A

1. **(a)** Eliminando il parametro t, si può esprimere la retta r come intersezione di due piani. Ad esempio, ricavando $t = -y$ dalla seconda equazione e sostituendo nella altre due, si ottiene che la retta è l'intersezione dei piani di equazioni $x+3y+1 = 0$ e $y+z-2 = 0$. Il piano π cercato apparterrà al fascio generato da questi due piani e avrà pertanto equazione $x + 3y + 1 + k(y + z - 2) = 0$. Dalla rappresentazione precedente, resta escluso il piano di equazione $y+z-2 = 0$, che però non contiene il punto P. Imponendo il passaggio per il punto P, si ottiene $k = 3$. Sostituendo si ricava π: $x + 6y + 3z - 5 = 0$.

   (b) La retta s si può ottenere come intersezione del piano π con il piano che passa per P e che è ortogonale a r, cioè con il piano di equazione $3(x-2)-(y-1)+(z+1) = 0$, ossia $3x - y + z - 4 = 0$. Pertanto

$$s : \begin{cases} x + 6y + 3z - 5 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

   I parametri direttori si s sono

$$\left(\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (9 : 8 : -19).$$

   Pertanto, dovendo passare per P, le equazioni parametriche di S sono

$$\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 8t \\ z = -1 - 19t\,. \end{cases}$$

2. **(a)** Poiché $y' = 5t^4+1$ è sempre positiva, la funzione $y = y(t)$ è strettamente monotona e quindi $y(t_1) \neq y(t_2)$ per ogni coppia di valori $t_1 \neq t_2$. Pertanto, γ è semplice.

   (b-d) Determiniamo per quale valore di t la curva passa per il punto O. Poiché

$$y(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^5 + t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t(t^4 + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0,$$

   si ha che la curva passa per O quanto $t = 0$. Inoltre, pensando la curva nello spazio, si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^4 + t^2 - t, t^5 + t, 0) \\ f'(t) &= (4t^3 + 2t - 1, 5t^4 + 1, 0) \\ f''(t) &= (12t^2 + 2, 20t^3, 0) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} f(0) &= (0, 0, 0) \\ f'(0) &= (-1, 1, 0) \\ f''(0) &= (2, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

   Dunque, si ha

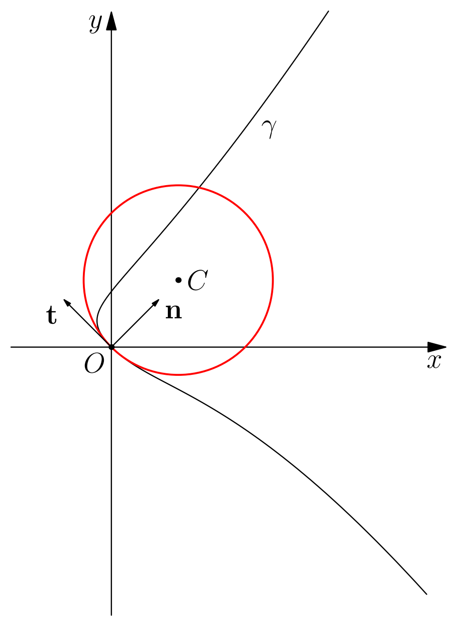
$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{f'(0)}{||f'(0)||} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \\ \mathbf{b} &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{||f'(0) \wedge f''(0)||} = (0, 0, -1) \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Il raggio di curvatura è

$$r = \frac{||f'(0)||^3}{||f'(0) \wedge f''(0)||} = \frac{(x'(0)^2 + y'(0)^2)^{3/2}}{|x''(0)y'(0) - x'(0)y''(0)|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,.$$

Il centro C della circonferenza osculatrice si trova sulla retta di equazione $y = x$ passante per O e avente per direzione $\mathbf{n}$, dalla parte del verso di $\mathbf{n}$, a distanza da O pari al raggio di curvatura. Quindi $C \equiv (1, 1)$ e l'equazione della circonferenza osculatrice è

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$



3. **(a)** L'equazione $y' = -\frac{2}{x}y + x$ è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. L'espressione $-\frac{2}{x}$ è definita sia per $x > 0$ sia per $x < 0$. Per $x > 0$ osserviamo che

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x + k,$$

pertanto, detta $A(x) = -2\ln x$ abbiamo che

$$y(x) = e^{A(x)}\left[c + \int e^{-A(x)} \cdot 4x \; dx\right] = \frac{1}{x^2}\left(c + x^4\right) = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

Conti analoghi portano al medesimo risultato anche per $x < 0$, dunque l'integrale generale, valido sia nell'intervallo $(0, +\infty)$ sia nell'intervallo $(-\infty, 0)$, è

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

(b) Imponendo la condizione $y(1) = 2$ si trova $c = 1$. Dunque la soluzione è $y(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$, definita sull'intervallo $(0, +\infty)$.

4. **(a)** L'integrale è improprio in $x = 0$. Poiché per $x \to 0$ la funzione integranda è asintotica a $-\frac{1}{9x^\alpha}$, l'integrale converge per $\alpha < 1$.

(b) Posto $t = \sqrt[6]{x}$, si ha $dx = 6t^5\ dt$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{64} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-9)}\,dx &= \int_0^2 \frac{6t^5}{t^3(t^2-9)}\ dt = 6\int_0^2 \frac{t^2}{t^2-9}\ dt \\
&= 6\int_0^2 \frac{t^2-9+9}{t^2-9}\ dt = 6\int_0^2 \left(1+\frac{9}{t^2-9}\right)\ dt \\
&= 6\int_0^2 \left(1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)\right)\ dt = \int_0^2 \left(6+\frac{9}{t-3}-\frac{9}{t+3}\right) dt \\
&= \left[6t+9\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_0^2 = 12-9\ln 5.
\end{aligned}$$

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere – 31 gennaio 2011**

Cognome: ______________________
Nome: ______________________
Matricola: ______________________

Compito B

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 8 punti	**Es. 4**: 8 punti	**Es. 5**: 2 punti	**Totale**

1. Sia $P \equiv (2, 1, -1)$ e sia r la retta di equazioni parametriche

$$r \ : \ \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - t\,. \end{cases}$$

   (a) Rappresentare in forma cartesiana il piano π che contiene r e passa per P.

   (b) Rappresentare in forma parametrica la retta s che passa per P, è contenuta in π ed è ortogonale a r.

2. Data la curva γ avente equazione parametrica

$$\gamma \ : \ \begin{cases} x = t^5 + t \\ y = t^4 - t^2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

   (a) stabilire se γ è semplice;

   (b) determinare il versore tangente $\mathbf{t}$ in $O \equiv (0, 0)$;

   (c) determinare il versore normale $\mathbf{n}$ in $O \equiv (0, 0)$;

   (d) determinare l'equazione della circonferenza osculatrice in $O \equiv (0, 0)$.

3. **(a)** Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{x}\, y(x) + 2x^2.$$

   (b) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x}\, y(x) + 2x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

   specificando l'intervallo massimale sul quale la soluzione può essere estesa.

4. Dato l'integrale improprio

$$\int_0^{64} \frac{1}{x^\alpha(\sqrt[3]{x} - 16)}\, dx,$$

   (a) determinare per quali valori di α esso converge;

   (b) calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni del compito B

1. (a) Eliminando il parametro t, si può esprimere la retta r come intersezione di due piani. Ad esempio, ricavando $t = -y$ dalla seconda equazione e sostituendo nella altre due, si ottiene che la retta è l'intersezione dei piani di equazioni $x+2y+1 = 0$ e $y - z + 2 = 0$. Il piano π cercato apparterrà al fascio generato da questi due piani e avrà pertanto equazione del tipo $x + 2y + 1 + k(y - z + 2) = 0$. Dalla rappresentazione precedente, resta escluso il piano di equazione $y - z + 2 = 0$, che però non contiene il punto P. Imponendo il passaggio per il punto P, si ottiene $k = -\frac{5}{4}$. Sostituendo si ricava una equazione di π: $4x + 3y + 5z - 6 = 0$.

   (b) La retta s si può ottenere come intersezione del piano π con il piano che passa per P ortogonale a r, cioè con il piano di equazione $2(x - 2) - (y - 1) - (z + 1) = 0$, ossia $2x - y - z - 4 = 0$. Quindi

$$s : \begin{cases} 4x + 3y + 5z - 6 = 0 \\ 2x - y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

   I parametri direttori si s sono

$$\left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (2 : 14 : -10) = (1 : 7 : -5).$$

   Pertanto, dovendo passare per P, le equazioni parametriche di S sono

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 7t \\ z = -1 - 5t\,. \end{cases}$$

2. **(a)** Poiché $x'(t) = 5t^4 + 1$ è sempre positiva, la funzione $x = x(t)$ è monotona, e quindi $x(t_1) \neq x(t_2)$ per ogni coppia di valori $t_1 \neq t_2$. Pertanto, γ è semplice.

   (b-d) Determiniamo per quale valore di t la curva passa per il punto O. Poiché

$$x(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^5 + t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t(t^4 + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0,$$

   si ha che la curva passa per $P(0, 0)$ quando $t = 0$. Inoltre, pensando la curva nello spazio, si ha

$$\begin{array}{lcl} f(t) = (t^5 + t, t^4 - t^2 + t, 0) & & f(0) = (0, 0, 0) \\ f'(t) = (5t^4 + 1, 4t^3 - 2t + 1, 0) & \text{e} & f'(0) = (1, 1, 0) \\ f''(t) = (20t^3, 12t^2 - 2, 0) & & f''(0) = (0, -2, 0)\,. \end{array}$$

   Dunque, si ha

$$\mathbf{t} = \frac{f'(0)}{||f'(0)||} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\mathbf{b} = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{||f'(0) \wedge f''(0)||} = (0, 0, -1)$$

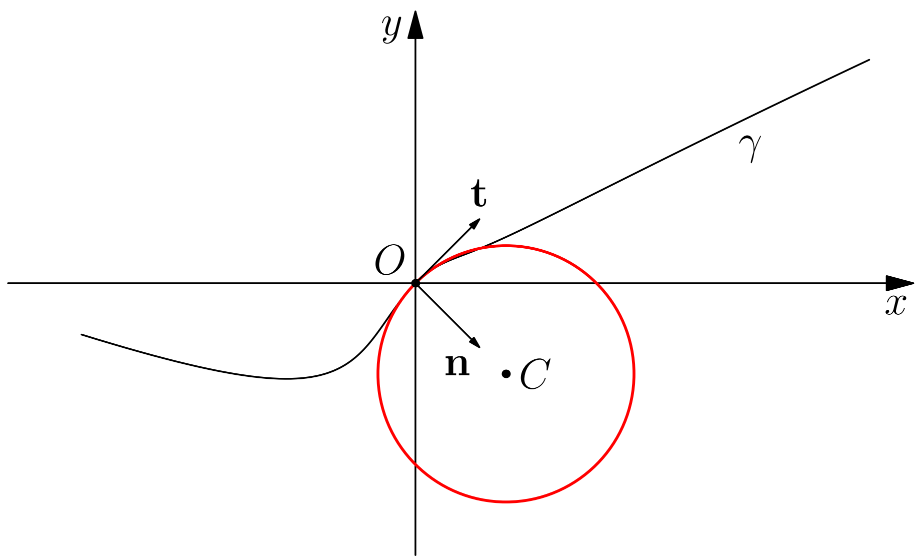
$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Il raggio di curvatura è

$$r = \frac{||f'(0)||^3}{||f'(0) \wedge f''(0)||} = \frac{(x'(0)^2 + y'(0)^2)^{3/2}}{|x''(0)y'(0) - x'(0)y''(0)|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,.$$

Il centro C della circonferenza osculatrice si trova sulla retta di equazione $y = -x$ passante per O e avente per direzione $\mathbf{n}$, dalla parte del verso di $\mathbf{n}$, a distanza da O pari al raggio di curvatura. Quindi $C \equiv (1, -1)$ e l'equazione della circonferenza osculatrice è

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \qquad \text{ossia} \qquad x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$$



3. **(a)** L'equazione $y' = \frac{1}{x}y + 2x^2$ è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. L'espressione $\frac{1}{x}$ è definita sia per $x > 0$ sia per $x < 0$. Per $x > 0$ osserviamo che

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k,$$

pertanto, detta $A(x) = \ln x$ abbiamo che

$$y(x) = e^{A(x)} \left[c + \int e^{-A(x)} \cdot 2x^2 \ dx \right] = x\left(c + x^2\right) = cx + x^3.$$

Conti analoghi portano al medesimo risultato anche per $x < 0$, dunque l'integrale generale, valido sia nell'intervallo $(0, +\infty)$ sia nell'intervallo $(-\infty, 0)$, è

$$y(x) = cx + x^3.$$

(b) Imponendo la condizione $y(1) = 3$ si trova $c = 2$. Dunque la soluzione è $y(x) = 2x + x^3$, prolungabile su tutto $(0, +\infty)$.

4. **(a)** L'integrale è improprio in $x = 0$. Poiché per $x \to 0$ la funzione integranda è asintotica a $-\frac{1}{16x^\alpha}$, l'integrale converge per $\alpha < 1$.

(b) Posto $t = \sqrt[6]{x}$, si ha $dx = 6t^5\ dt$ e

$$\int_0^{64} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 16)}\ dx = \int_0^2 \frac{6t^5}{t^3(t^2-16)}\ dt = 6\int_0^2 \frac{t^2}{t^2-16}\ dt$$

$$= 6\int_0^2 \frac{t^2 - 16 + 16}{t^2-16}\ dt = 6\int_0^2 \left(1 + \frac{16}{t^2-16}\right)\ dt$$

$$= 6\int_0^2 \left(1 + 2\left(\frac{1}{t-4} - \frac{1}{t+4}\right)\right)\ dt = \int_0^2 \left(6 + \frac{12}{t-4} - \frac{12}{t+4}\right)\ dt$$

$$= \left[6t + 12\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|\right]_0^2 = 12 - 12\ln 3.$$