Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello – 14 Febbraio 2011**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 7 punti	**Es. 2**: 10 punti	**Es. 3**: 7 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Es. 5**: 3 punti	**Totale**

1. (a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin arrestato al quarto ordine di $\operatorname{artg} x$ e $\ln(1+x)$.
   (b) Usare i risultati precedenti per calcolare il seguente limite, al variare del parametro reale α:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{artg} x + 2\ln(1+x) - 4x + x^2}{x^\alpha \left(e^{2\sqrt{x}} - 1\right)}\,.$$

2. Sia $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Studiare la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2\ln x}\right)$$
per ogni $x \in D$.
(Segno di f, limiti agli estremi, eventuali asintoti, derivata prima, segno della derivata prima, punti di massimo o minimo, derivata seconda, segno della derivata seconda, concavità e flessi, grafico.)

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche
$$\gamma \ : \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t^2 + 1 \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$
e sia P_0 il punto di γ corrispondente a $t = 0$.
   (a) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano osculatore a γ in P_0.
   (b) Determinare il versore tangente, il versore normale e il versore binormale a γ in P_0.
   (c) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

4. Calcolare l'integrale generalizzato
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni del compito A

1. (a) Per $x \to 0^+$, si ha

$$\operatorname{artg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\,.$$

(b) Sia $f(x) = a(x)/b(x)$ la funzione della quale si vuole calcolare il limite. Quando $x \to 0^+$, per il numeratore $a(x)$ si ha

$$\begin{aligned} a(x) &= 2\operatorname{artg} x + 2\ln(1+x) - 4x + x^2 \\ &= 2x - \frac{2}{3}x^3 + 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 4x + x^2 \\ &= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \sim -\frac{x^4}{2}\,. \end{aligned}$$

Per il denominatore $b(x)$ si ha

$$b(x) = x^\alpha \left(e^{2\sqrt{x}} - 1\right) = x^\alpha \frac{e^{2\sqrt{x}} - 1}{2\sqrt{x}}\, 2\sqrt{x} \sim 2x^{\alpha+1/2}\,.$$

Quindi, per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{-x^4/2}{2x^{\alpha+1/2}} = -\frac{1}{4}\, x^{7/2-\alpha}$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 7/2 \\ -1/4 & \text{se } \alpha = 7/2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 7/2\,. \end{cases}$$

2. (a) **Segno**. Poiché $x > 0\ \forall x \in D$, $f(x)$ ha il segno di $1 + \dfrac{1}{2\ln x}$, cioé di $\dfrac{2\ln x + 1}{2\ln x}$, che è ≥ 0 per $\ln x \leq -\dfrac{1}{2} \vee \ln x > 0$, cioé per $0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}} \vee x > 1$. In definitiva, risulta:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{per } 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{e}} \vee x > 1 \\ f(x) = 0 & \text{per } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ f(x) < 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

(b) **Limiti alla frontiera e asintoti**:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{x}{2\ln x}\right) = 0 + 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\left(x + \frac{x}{2\ln x}\right) = 1 \pm \infty = \pm\infty \qquad (x = 1 \text{ è un asintoto verticale})$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x + \frac{x}{2\ln x}\right) = +\infty + \infty = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{2\ln x}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{2\ln x}\right) = +\infty \qquad (\text{non c'è asintoto obliquo a } +\infty)\,.$$

(c) **Derivata e punti estremanti**. Risulta

$$f'(x) = \frac{1}{2\ln x} - \frac{1}{2\ln^2 x} + 1\,.$$

Poiché $\ln^2 x > 0\ \forall x \in D$, la disequazione $f'(x) \geq 0$ è equivalente (in D) a $2\ln^2 x + \ln x - 1 \geq 0$, verificata per $\ln x \leq -1 \vee \ln x \geq \frac{1}{2}$, ossia per $0 < x \leq \frac{1}{e} \ \vee\ x \geq \sqrt{e}$. In definitiva, risulta:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } 0 < x < 1/\mathrm{e} \vee x > \sqrt{\mathrm{e}} \\ f'(x) = 0 & \text{per } x = 1/\mathrm{e} \vee x = \sqrt{\mathrm{e}} \\ f'(x) < 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

La funzione f è quindi crescente in $(0, 1/e]$ e in $[\sqrt{e}, +\infty)$ ed è decrescente in $[1/e, 1)$ e in $(1, \sqrt{e}]$. Il punto $1/e$ è un punto di massimo relativo (con $f(1/e) = 1/(2e)$), mentre il punto $\sqrt{e}$ è un punto di minimo relativo (con $f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$). Inoltre, si ha $f'(x) \to 1$ per $x \to 0^+$.

(d) **Derivata seconda e punti di flesso**. Risulta

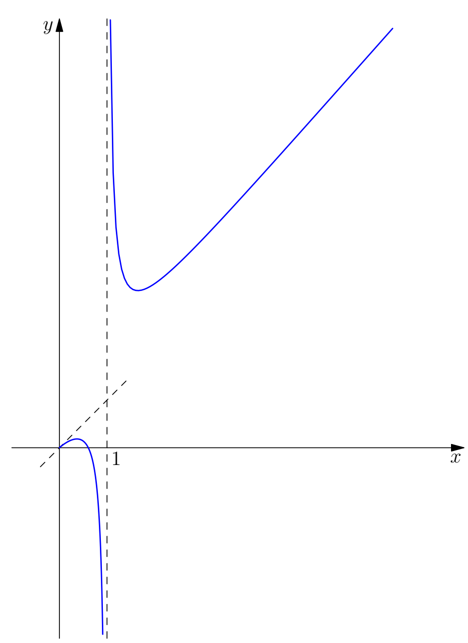
$$f''(x) = \frac{1}{x\ln^3 x} - \frac{1}{2x\ln^2 x} = \frac{2-\ln x}{2x\ln^3 x}\,.$$

Poiché $x > 0\ \forall x \in D$, risulta $f''(x) \geq 0 \iff \frac{2-\ln x}{\ln^3 x} \geq 0 \iff \frac{2-\ln x}{\ln x} \geq 0 \iff 0 < \ln x \leq 2 \iff 1 < x \leq e^2$. In definitiva risulta:

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{per } 1 < x < e^2 \\ f''(x) = 0 & \text{per } x = e^2 \\ f''(x) < 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

La funzione f è quindi convessa in $(1, e^2]$ e concava in $(0, 1)$ e $(e^2, +\infty)$. Il punto e^2 è un punto di flesso (con $f(e^2) = \frac{5}{4}e^2$).

(e) **Grafico**.



3. Si ha

$$f(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2+1)$$
$$f'(t) = (\cos t - t\sin t, t\cos t + \sin t, 2t)$$
$$f''(t) = (-t\cos t - 2\sin t, 2\cos t - t\sin t, 2)\,.$$

(a) Per $t = 0$, si ha

$$f(0) = (0,0,1) \equiv P_0\,, \qquad f'(0) = (1,0,0)\,, \qquad f''(0) = (0,2,2)\,.$$

Pertanto, il piano osculatore a γ in P_0 ha equazione

$$\begin{vmatrix} x - x(0) & y - y(0) & z - z(0) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x''(0) & y''(0) & z''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia $-2y + 2(z-1) = 0$, ossia $y - z + 1 = 0$.

(b) I versori tangente, binormale e normale sono dati da

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{||f'(0)||} = (1,0,0)$$
$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0)\wedge f''(0)}{||f'(0)\wedge f''(0)||} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0)\wedge\mathbf{t}(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

(c) Si ha

$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\,||f'(t)||\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{5t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\sqrt{5t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{(5t^2+1)^{3/2}}{15}\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{1}{15}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{5} - \frac{2}{15}\,.$$

4. Per ogni $t > 1$, integrando per parti, si ha

$$\int_1^t \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^t + \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^t + \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^t$$
$$= \left[-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln\frac{x}{x+1}\right]_1^t$$
$$= -\frac{\ln(t+1)}{t} + \ln\frac{t}{t+1} + \ln 2 - \ln\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{\ln(t+1)}{t} + \ln\frac{t}{t+1} + 2\ln 2\,.$$

Quindi

$$I = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{\ln(t+1)}{t} + \ln\frac{t}{t+1} + 2\ln 2 \right) = 2\ln 2\,.$$

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere – 31 gennaio 2011**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito B

Es. 1: 7 punti	**Es. 2**: 10 punti	**Es. 3**: 7 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Es. 5**: 3 punti	**Totale**

1. (a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin arrestato al quarto ordine di $\operatorname{artg} x$ e $\ln(1+x)$.

   (b) Usare i risultati precedenti per calcolare il seguente limite al variare del parametro reale α:
$$\lim_{x\to 0} \frac{4x - x^2 - 2\operatorname{artg} x - 2\ln(1+x)}{x^\alpha \left(e^{2x^2} - 1\right)}\,.$$

2. Sia $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$, Studiare la funzione ia $f : D \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = -x\left(1 + \frac{1}{6\ln x}\right)$$
per ogni $x \in D$.

   (Segno di f, limiti agli estremi, eventuali asintoti, derivata prima, segno della derivata prima, punti di massimo o minimo, derivata seconda, segno della derivata seconda, concavità e flessi, grafico.)

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche
$$\gamma \ : \ \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = 1 - t^2 \end{cases} \qquad t \in [-2,2]$$
e sia P_0 il punto di γ corrispondente a $t = 0$.

   (a) Determinare una rappresentazione cartesiana del piano osculatore a γ in P_0.

   (b) Determinare il versore tangente, il versore normale e il versore binormale a γ in P_0.

   (c) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

4. Calcolare l'integrale generalizzato
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni del compito B

1. (a) Per $x \to 0^+$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} \operatorname{artg} x &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

(b) Sia $f(x) = a(x)/b(x)$ la funzione della quale si vuole calcolare il limite. Quando $x \to 0$, per il numeratore $a(x)$ si ha

$$\begin{aligned} a(x) &= 4x - x^2 - 2\operatorname{artg} x - 2\ln(1+x) \\ &= 4x - x^2 - 2x + 2\frac{x^3}{3} - 2x + x^2 - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= \frac{x^4}{2} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{2}\,. \end{aligned}$$

Per il denominatore $b(x)$ si ha

$$b(x) = x^\alpha(e^{2x^2} - 1) = x^\alpha(1 + 2x^2 + o(x^2) - 1) = x^\alpha(2x^2 + o(x^2)) \sim 2x^{\alpha+2}\,.$$

Quindi, per $x \to 0$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^4/2}{2x^{\alpha+2}} = \frac{1}{4}\, x^{2-\alpha}\,,$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ 1/4 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2\,. \end{cases}$$

2. (a) **Segno**. Poiché $x > 0\ \forall\, x \in D$, $f(x)$ ha il segno di $-1 - \dfrac{1}{6\ln x}$, cioé di $\dfrac{-6\ln x - 1}{6\ln x}$, che è ≥ 0 per $-\dfrac{1}{6} \leq \ln x \leq 0$, cioé per $\mathrm{e}^{-1/6} \leq x < 1$. In definitiva, risulta:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{per } \mathrm{e}^{-1/6} < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{per } x = \mathrm{e}^{-1/6} \\ f(x) < 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

(b) **Limiti alla frontiera e asintoti**:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x - \frac{x}{6\ln x}\right) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\left(-x - \frac{x}{6\ln x}\right) = -1 \mp \infty = \mp\infty \qquad (x = 1 \text{è un asintoto verticale})$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x - \frac{x}{6\ln x}\right) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{x}{6\ln x}\right) = -\infty \qquad (\text{non c'è asintoto obliquo a } +\infty)\,.$$

(c) **Derivata e punti estremanti**. Risulta

$$f'(x) = -\frac{1}{6\ln x} + \frac{1}{6\ln^2 x} - 1\,;$$

Poiché $\ln^2 x > 0\ \forall\, x \in D$, la disequazione è equivalente (in D) a $-6\ln^2 x - \ln x + 1 \geq 0$, verificata per $-\frac{1}{2} \leq \ln x \leq \frac{1}{3}$, ossia per $e^{-1/2} \leq x \leq e^{1/3}$. In definitiva, risulta:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } \mathrm{e}^{-1/2} < x < e^{1/3}\ (x \neq 1) \\ f'(x) = 0 & \text{per } x = \mathrm{e}^{-1/2} \text{ o per } x = \mathrm{e}^{1/3} \\ f'(x) < 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Quindi la funzione f è crescente in $[\mathrm{e}^{-1/2}, 1)$ e in $(1, \mathrm{e}^{1/3}]$ ed è decrescente in $(0, \mathrm{e}^{-1/2}]$ e in $[\mathrm{e}^{1/3}, +\infty)$. Il punto $\mathrm{e}^{1/3}$ è un punto di massimo relativo (con $f(\mathrm{e}^{1/3}) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{1/3}$) mentre il punto $\mathrm{e}^{-1/2}$ è un punto di minimo relativo (con $f(\mathrm{e}^{-1/2} = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-1/2})$. Infine, si ha $f'(x) \to -1$ per $x \to 0^+$.

(d) **Derivata seconda e punti di flesso**. Risulta

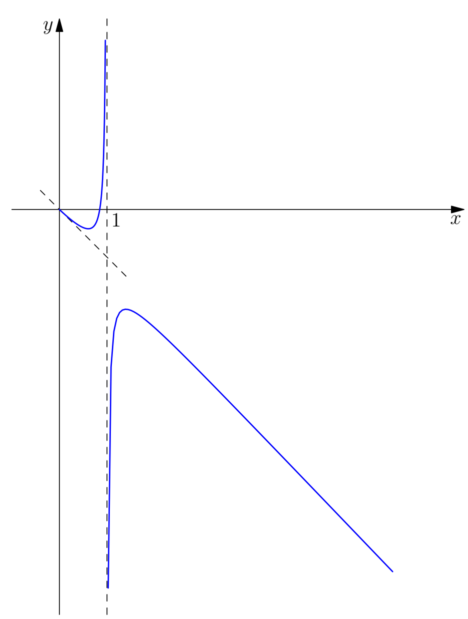
$$f''(x) = \frac{1}{6x\ln^2 x} - \frac{1}{3x\ln^3 x} = \frac{\ln x - 2}{6x\ln^3 x}\,.$$

Poiché $x > 0\ \forall\, x \in D$, risulta $f''(x) \geq 0 \iff \dfrac{\ln x - 2}{\ln^3 x} \geq 0 \iff \dfrac{\ln x - 2}{\ln x} \geq 0 \iff \ln x < 0 \vee \ln x \geq 2 \iff 0 < x < 1 \vee \ln x \geq e^2$. In definitiva risulta:

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{per } 0 < x < 1 \ \vee\ x \geq \mathrm{e}^2 \\ f''(x) = 0 & \text{per } x = \mathrm{e}^2 \\ f''(x) < 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

La funzione f è quindi convessa in $(0,1)$ e in $[\mathrm{e}^2, +\infty)$, mentre è concava in $(1, \mathrm{e}^2]$. Il punto e^2 è un punto di flesso (con $f(\mathrm{e}^2) = -\frac{13}{12}\mathrm{e}^2$).

(e) **Grafico**:



3. Si ha

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (t\cos t, t\sin t, -t^2+1)\\
f'(t) &= (\cos t - t\sin t, t\cos t + \sin t, -2t)\\
f''(t) &= (-t\cos t - 2\sin t, 2\cos t - t\sin t, -2)\,.
\end{aligned}
$$

(a) Per $t = 0$, si ha

$$
f(0) = (0,0,1) \equiv P_0\,, \qquad f'(0) = (1,0,0)\,, \qquad f''(0) = (0,2,-2)\,.
$$

Pertanto, il piano osculatore a γ in P_0 ha equazione

$$
\begin{vmatrix} x - x(0) & y - y(0) & z - z(0) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x''(0) & y''(0) & z''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0
$$

ossia $2y + 2(z-1) = 0$, ossia $y + z - 1 = 0$.

(b) I versori tangente, binormale e normale sono dati da

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{||f'(0)||} = (1,0,0)\\
\mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0)\wedge f''(0)}{||f'(0)\wedge f''(0)||} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0)\wedge \mathbf{t}(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.
\end{aligned}
$$

(c) Si ha

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}s = \int_{-2}^{2} \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\, ||f'(t)||\, \mathrm{d}t\\
&= \int_{-2}^{2} |t|\sqrt{5t^2+1}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^2 t\sqrt{5t^2+1}\, \mathrm{d}t = 2\left[\frac{(5t^2+1)^{3/2}}{15}\right]_0^2\\
&= 2\left(\frac{7\sqrt{21}}{5} - \frac{1}{15}\right) = \frac{14\sqrt{21}}{5} - \frac{2}{15}\,.
\end{aligned}
$$

4. Per ogni $t > 1$, integrando per parti, si ha

$$
\begin{aligned}
\int_1^t \frac{\ln x}{(x+1)^2}\, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x+1}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\, \mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{\ln x}{x+1}\right]_1^t + \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{\ln x}{x+1}\right]_1^t + \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^t\\
&= \left[-\frac{\ln x}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1}\right]_1^t\\
&= -\frac{\ln t}{t+1} + \ln\frac{t}{t+1} - \ln\frac{1}{2}\\
&= -\frac{\ln t}{t+1} + \ln\frac{t}{t+1} + \ln 2\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$I = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{\ln t}{t+1} + \ln\frac{t}{t+1} + \ln 2 \right) = \ln 2\,.$$