Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere** **30 Gennaio 2012** **Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate****. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia α un parametro reale e sia $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1 + t^3}} \, dt \, .$$
   (a) Si mostri che, per ogni valore del parametro α, la funzione F è strettamente crescente sull'intervallo $[1, +\infty)$.

   (b) Si determinino i valori del parametro α in corrispondenza dei quali la funzione F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

   Soluzione.

   (a) Essendo una funzione integrale, la funzione F è derivabile su tutto l'intervallo su cui è definita e
$$F'(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{x^\alpha \sqrt{1 + x^3}} \, .$$
   Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$, la funzione F è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[1, +\infty)$.

   (b) La funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ quando esiste finito il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{e^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1 + t^3}} \, dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1 + t^3}} \, dt \, .$$
   Si tratta quindi di studiare la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale generalizzato
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1 + t^3}} \, dt \, .$$
   Come abbiamo già osservato, la funzione
$$f(t) = \frac{e^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1 + t^3}}$$
   è strettamente positiva per ogni $t \geq 1$. Inoltre essa è continua per ogni $t \geq 1$. Infine, per $t \to +\infty$, si ha $1/t \to 0$ e quindi
$$f(t) \sim \frac{1/t}{t^\alpha t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t^{\alpha + \frac{5}{2}}} \, .$$
   Questa funzione, e quindi per il teorema dell'equivalenza asintotica anche la funzione $f(t)$, è integrabile esattamente per $\alpha + \frac{5}{2} > 1$, ossia per $\alpha > -\frac{3}{2}$.

2. (a) Si determini il valore del parametro reale k in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = k \end{cases}$$

siano incidenti esattamente in un punto P.

(b) Per il valore di k trovato nel punto precedente, si determinino le coordinate del punto P e si scriva l'equazione cartesiana del piano π che contiene entrambe le rette r ed s.

Soluzione.

(a) Intersechiamo le due rette date. Sostituendo le coordinate del generico punto di r nella prima equazione che definisce s, si ottiene $t = 1$. Per questo valore del parametro t si ottiene il punto $P \equiv (2, 0, -1) \in r$. Sostituendo le coordinate di questo punto nella seconda equazione che definisce s, si ottiene $k = 3$. In conclusione, le due rette r ed s si intersecano esattamente in un punto P per $k = 3$.

(b) Per $k = 3$, come già trovato, si ha $P \equiv (2, 0, -1)$. Per determinare il piano π che contiene entrambe le rette r ed s si può procedere in almeno due modi.

i. **Primo modo.** Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ due vettori direttori rispettivamente di r e di s. Il piano π può essere determinato come il piano che passa per il punto P e che ha $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ come vettore direttore (ortogonale sia ad $\mathbf{a}$ che a $\mathbf{b}$). Poiché $\mathbf{a} = (1, -1, -3)$ e

$$\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \right) = (1, 2, -3),$$

si ha

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (9, 0, 3).$$

Quindi l'equazione cartesiana di π è

$$9(x - 2) + 0(y - 0) + 3(z + 1) = 0$$

ossia $\pi \ : \ 3x + z - 5 = 0$.

ii. **Secondo modo.** Sia Φ il fascio di piani che ha s come sostegno. Il piano π può essere determinato come il piano appartenente al fascio Φ che passa per il punto $Q \equiv (1, 1, 2)$ appartenete ad r (ottenuto per $t = 0$ e diverso da $P = r \cap s$). L'equazione del fascio Φ è

$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - 2y - z - 3) = 0.$$

Imponendo il passaggio per Q si ottiene $\lambda = 2\mu$. Quindi $\pi \ : \ 3x + z - 5 = 0$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = 2t^3 y + \dfrac{t^3}{y}$.

   (a) Si trovi l'integrale generale (insieme di tutte le soluzioni) dell'equazione.

   (b) Si determini la soluzione $\bar{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui risulta $\bar{y}(0) = 1$.

Soluzione.

(a) L'equazione è a variabili separabili, poiché si può porre nella forma

$$y' = t^3 \left(y + \frac{1}{y} \right) ,$$

ovvero

$$y' = t^3 \cdot \frac{y^2+1}{y} .$$

Notiamo innanzitutto che l'espressione $\dfrac{y^2+1}{y}$ perde di significato quando $y = 0$, pertanto le eventuali soluzioni non possono assumere il valore 0 per alcun valore di t.

Poiché $\dfrac{y^2+1}{y}$ non si annulla per alcun valore di y, non ci sono soluzioni stazionarie. Le soluzioni sono quindi tutte e sole quelle che soddisfano la relazione

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \int t^3\, dt .$$

Esplicitando la relazione si ottiene

$$\frac{1}{2} \ln |y^2+1| = \frac{1}{4} t^4 + c .$$

Poiché $y^2 + 1$ è sempre positivo, si ottiene

$$\ln (y^2+1)^2 = t^4 + 2c ,$$

, da cui

$$(y^2+1)^2 = e^{t^2+2c} = e^{2c} \cdot e^{t^2}$$

e quindi

$$y^2 + 1 = e^c \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

Poiché c è arbitraria, e^c è una arbitraria costante positiva. In definitiva, si ottiene

$$y = \pm \sqrt{k e^{\frac{t^2}{2}} - 1} \qquad \text{con } k > 0 .$$

(b) Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = \sqrt{k-1}$, soddisfatta per $k = 2$. Si ottiene quindi

$$\bar{y}(t) = \sqrt{2e^{\frac{t^2}{2}} - 1} .$$

Notiamo che risulta $2e^{\frac{t^2}{2}} - 1 > 0 \; \forall\, t \in \mathbb{R}$. Infatti risulta $t^2 \geq 0 \; \forall\, t \in \mathbb{R}$ e quindi $e^{\frac{t^2}{2}} \geq 1 \; \forall\, t \in \mathbb{R}$, da cui segue $2e^{\frac{t^2}{2}} \geq 2 \; \forall\, t \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare $\bar{y}$ come definita in tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases} \qquad t \in [0, 4] \,.$$

(a) Si trovino il versore tangente ed il versore normale in ogni punto di γ.

(b) Si calcoli

$$\int_\gamma f \, ds$$

dove $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{z} + 2}$

(c) Si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Soluzione.

(a) Posto $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t, e^t \sin t)$, abbiamo $\dot{\mathbf{r}}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t), e^t)$ e quindi $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{3}\, e^t$, e

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t), \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t), \frac{1}{\sqrt{3}} \right) .$$

Essendo inoltre $\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t), \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t), 0 \right)$ e $|\dot{\mathbf{T}}(t)| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ risulta

$$\mathbf{N}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t), 0 \right) .$$

(b)

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^4 \sqrt{\frac{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2}{e^t} + 1}\, \sqrt{3}\, e^t \, dt = \sqrt{3} \int_0^4 \sqrt{e^t + 1}\, e^t \, dt =$$

e con il cambiamento di variabile $y = e^t$ l'ultimo termine diventa

$$= \sqrt{3} \int_1^{e^4} \sqrt{y+1} \, dy = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} (y+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^4} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[(e^4+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right] .$$

(c) Vedi libro di testo.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere** **30 Gennaio 2012** **Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate****. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia α un parametro reale e sia $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^\alpha (\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1 + t^2}} \, \mathrm{d}t \, .$$

(a) Si mostri che, per ogni valore del parametro α, la funzione F è strettamente crescente sull'intervallo $[1, +\infty)$.

(b) Si determinino i valori del parametro α in corrispondenza dei quali la funzione F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Soluzione.

(a) Essendo una funzione integrale, la funzione F è derivabile su tutto l'intervallo su cui è definita e

$$F'(x) = \frac{x^\alpha (\mathrm{e}^{1/x} - 1)}{\sqrt[3]{1 + x^2}} \, .$$

Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$, la funzione F è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[1, +\infty)$.

(b) La funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ quando esiste finito il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{t^\alpha (\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1 + t^2}} \, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha (\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1 + t^2}} \, \mathrm{d}t \, .$$

Si tratta quindi di studiare la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale generalizzato

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha (\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1 + t^2}} \, \mathrm{d}t \, .$$

Come abbiamo già osservato, la funzione

$$f(t) = \frac{t^\alpha (\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1 + t^2}}$$

è strettamente positiva per ogni $t \geq 1$. Inoltre essa è continua per ogni $t \geq 1$. Infine, per $t \to +\infty$, si ha $1/t \to 0$ e quindi

$$f(t) \sim \frac{t^\alpha \, 1/t}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{t^{-\alpha + \frac{5}{3}}} \, .$$

Questa funzione, e quindi per il teorema dell'equivalenza asintotica anche la funzione $f(t)$, è integrabile esattamente per $-\alpha + \frac{5}{3} > 1$, ossia per $\alpha < \frac{2}{3}$.

2. (a) Si determini il valore del parametro reale k in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + t \\ z = -4 + 3t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = k \end{cases}$$

siano incidenti esattamente in un punto P.

(b) Per il valore di k trovato nel punto precedente, si determinino le coordinate del punto P e si scriva l'equazione cartesiana del piano π che contiene entrambe le rette r ed s.

Soluzione.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = ty + \dfrac{t}{y}$.

 (a) Si trovi l'integrale generale (insieme di tutte le soluzioni) dell'equazione.
 (b) Si determini la soluzione $\bar{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui risulta $\bar{y}(0) = 1$.

Soluzione.

(a) L'equazione è a variabili separabili, poiché si può porre nella forma

$$y' = t\left(y + \frac{1}{y}\right),$$

ovvero

$$y' = t \cdot \frac{y^2 + 1}{y}.$$

Notiamo innanzitutto che l'espressione $\dfrac{y^2+1}{y}$ perde di significato quando $y = 0$, pertanto le eventuali soluzioni non possono assumere il valore 0 per alcun valore di t.

Poiché $\dfrac{y^2+1}{y}$ non si annulla per alcun valore di y, non ci sono soluzioni stazionarie. Le soluzioni sono quindi tutte e sole quelle che soddisfano la relazione

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \int t\, dt.$$

Esplicitando la relazione si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln|y^2+1| = \frac{1}{2}t^2 + c.$$

Poiché $y^2 + 1$ è sempre positivo, si ottiene

$$\ln(y^2+1) = t^2 + 2c,$$

e quindi

$$y^2 + 1 = e^{t^2+2c} = e^{2c} \cdot e^{t^2}.$$

Poiché c è arbitraria, e^{2c} è una arbitraria costante positiva. In definitiva, si ottiene

$$y = \pm\sqrt{ke^{t^2} - 1} \qquad \text{con } k > 0.$$

(b) Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = \sqrt{k-1}$, soddisfatta per $k = 2$. Si ottiene quindi

$$\bar{y}(t) = \sqrt{2e^{t^2} - 1}.$$

Notiamo che risulta $2e^{t^2} - 1 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Infatti risulta $t^2 \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ e quindi $e^{t^2} \geq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$, da cui segue $2e^{t^2} \geq 2\ \forall t \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare $\bar{y}$ come definita in tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \\ z = e^t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 5]\,.$$

(a) Si trovino il versore tangente ed il versore normale in ogni punto di γ.

(b) Si calcoli

$$\int_\gamma f\, ds$$

dove $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x^2+z^2}{y} + 1}$

(c) Si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Soluzione.

(a) Posto $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t, e^t \sin t)$, abbiamo $\dot{\mathbf{r}}(t) = (e^t(\cos t - \sin t)\,, e^t, e^t(\cos t + \sin t))$ e quindi $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{3}\, e^t$, e

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t), \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t) \right)\,.$$

Essendo inoltre $\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t), 0, \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t) \right)$ e $|\dot{\mathbf{T}}(t)| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ risulta

$$\mathbf{N}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t), 0, \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t) \right)\,.$$

(b)

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^5 \sqrt[3]{\frac{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2}{e^t} + 1}\, \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3} \int_0^5 \sqrt[3]{e^t + 1}\, e^t\, dt$$

e con il cambiamento di variabile $y = e^t$ l'ultimo termine diventa

$$= \sqrt{3} \int_1^{e^5} \sqrt[3]{y+1}\, dy = \left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\, (y+1)^{\frac{4}{3}} \right]_1^{e^5} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[(e^5+1)^{\frac{4}{3}} - 2\sqrt[3]{2} \right]\,.$$

(c) Vedi libro di testo.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere** **30 Gennaio 2012** **Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia β un parametro reale e sia $F : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{e}^{1/t^2} - 1}{t^\beta \sqrt{1 + t^3}} \, \mathrm{d}t \, .$$

(a) Si mostri che, per ogni valore del parametro β, la funzione F è strettamente crescente sull'intervallo $[2, +\infty)$.

(b) Si determino i valori del parametro β in corrispondenza dei quali la funzione F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Soluzione.

(a) Essendo una funzione integrale, la funzione F è derivabile su tutto l'intervallo su cui è definita e

$$F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x^2} - 1}{x^\beta \sqrt{1 + x^3}} \, .$$

Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$, la funzione F è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[1, +\infty)$.

(b) La funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ quando esiste finito il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{1/t^2} - 1}{t^\beta \sqrt{1 + t^3}} \, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/t^2} - 1}{t^\beta \sqrt{1 + t^3}} \, \mathrm{d}t \, .$$

Si tratta quindi di studiare la convergenza, al variare del parametro reale β, dell'integrale generalizzato

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/t^2} - 1}{t^\beta \sqrt{1 + t^3}} \, \mathrm{d}t \, .$$

Come abbiamo già osservato, la funzione

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{1/t^2} - 1}{t^\beta \sqrt{1 + t^3}}$$

è strettamente positiva per ogni $t \geq 1$. Inoltre essa è continua per ogni $t \geq 1$. Infine, per $t \to +\infty$, si ha $1/t^2 \to 0$ e quindi

$$f(t) \sim \frac{1/t^2}{t^\beta t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t^{\beta + \frac{7}{2}}} \, .$$

Questa funzione, e quindi per il teorema dell'equivalenza asintotica anche la funzione $f(t)$, è integrabile esattamente per $\beta + \frac{7}{2} > 1$, ossia per $\beta > -\frac{5}{2}$.

2. (a) Si determini il valore del parametro reale k in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = k \end{cases}$$

siano incidenti esattamente in un punto P.

(b) Per il valore di k trovato nel punto precedente, si determinino le coordinate del punto P e si scriva l'equazione cartesiana del piano π che contiene entrambe le rette r ed s.

Soluzione.

(a) Intersechiamo le due rette date. Sostituendo le coordinate del generico punto di r nella prima equazione che definisce s, si ottiene $t = -2$. Per questo valore del parametro t si ottiene il punto $P \equiv (3, -1, -4) \in r$. Sostituendo le coordinate di questo punto nella seconda equazione che definisce s, si ottiene $k = 7$. In conclusione, le due rette r ed s si intersecano esattamente in un punto P per $k = 7$.

(b) Per $k = 7$, come già trovato, si ha $P \equiv (3, -1, -4)$. Per determinare il piano π che contiene entrambe le rette r ed s si può procedere in almeno due modi.

i. **Primo modo.** Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ due vettori direttori rispettivamente di r e di s. Il piano π può essere determinato come il piano che passa per il punto P e che ha $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ come vettore direttore (ortogonale sia ad $\mathbf{a}$ che a $\mathbf{b}$). Poiché $\mathbf{a} = (-1, 1, 3)$ e

$$\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \right) = (1, 2, 1),$$

si ha

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-5, 4, -3).$$

Quindi l'equazione cartesiana di π è

$$5(x - 3) - 4(y + 1) + 3(z + 4) = 0$$

ossia $\pi \, : \, 5x - 4y + 3z - 7 = 0$.

ii. **Secondo modo.** Sia Φ il fascio di piani che ha s come sostegno. Il piano π può essere determinato come il piano appartenente al fascio Φ che passa per il punto $Q \equiv (1, 1, 2)$ appartenete ad r (ottenuto per $t = 0$ e diverso da $P = r \cap s$). L'equazione del fascio Φ è

$$\lambda(x - y + z) + \mu(3x - 2y + z - 7) = 0.$$

Imponendo il passaggio per Q si ottiene $\lambda = 2\mu$. Quindi $\pi \, : \, 5x - 4y + 3z - 7 = 0$.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = ty + \dfrac{t}{2y}$.

(a) Si trovi l'integrale generale (insieme di tutte le soluzioni) dell'equazione.

(b) Si determini la soluzione $\bar{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui risulta $\bar{y}(0) = 1$.

Soluzione.

(a) L'equazione è a variabili separabili, poiché si può porre nella forma

$$y' = t\left(y + \frac{1}{2y}\right),$$

ovvero

$$y' = t \cdot \frac{2y^2+1}{2y}.$$

Notiamo innanzitutto che l'espressione $\dfrac{2y^2+1}{2y}$ perde di significato quando $y = 0$, pertanto le eventuali soluzioni non possono assumere il valore 0 per alcun valore di t.

Poiché $\dfrac{2y^2+1}{2y}$ non si annulla per alcun valore di y, non ci sono soluzioni stazionarie. Le soluzioni sono quindi tutte e sole quelle che soddisfano la relazione

$$\int \frac{2y}{2y^2+1}\, dy = \int t\, dt.$$

Esplicitando la relazione si ottiene

$$\frac{1}{2}\ln|2y^2+1| = \frac{1}{2}t^2 + c.$$

Poiché $2y^2+1$ è sempre positivo, si ottiene

$$\ln(2y^2+1) = t^2 + 2c,$$

e quindi

$$2y^2 + 1 = e^{t^2+2c} = e^{2c} \cdot e^{t^2}.$$

Poiché c è arbitraria, e^{2c} è una arbitraria costante positiva. In definitiva, si ottiene

$$y = \pm\sqrt{\frac{ke^{t^2}-1}{2}} \qquad \text{con } k > 0.$$

(b) Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = \sqrt{\frac{k-1}{2}}$, soddisfatta per $k = 3$. Si ottiene quindi

$$\bar{y}(t) = \sqrt{\frac{3e^{t^2}-1}{2}}.$$

Notiamo che risulta $3e^{t^2} - 1 > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Infatti risulta $t^2 \geq 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ e quindi $e^{t^2} \geq 1\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, da cui segue $3e^{t^2} \geq 3\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare $\bar{y}$ come definita in tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \\ z = e^t \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2]\,.$$

(a) Si trovino il versore tangente ed il versore normale in ogni punto di γ.

(b) Si calcoli

$$\int_\gamma f\, ds$$

dove $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{3x^2+3z^2}{y} + 2}$

(c) Si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Soluzione.

(a) Posto $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t, e^t \sin t)$, abbiamo $\dot{\mathbf{r}}(t) = (e^t(\cos t + \sin t), e^t, e^t(\cos t - \sin t))$ e quindi $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{3}\, e^t$, e

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t), \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t) \right) .$$

Essendo inoltre $\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t + \cos t), 0, \frac{1}{\sqrt{3}}(-\cos t - \sin t) \right)$ e $|\dot{\mathbf{T}}(t)| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ risulta

$$\mathbf{N}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t + \cos t), 0, \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t) \right) .$$

(b)

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^2 \sqrt[3]{\frac{3(e^t \cos t)^2 + 3(e^t \sin t)^2}{e^t} + 2}\; \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3} \int_0^2 \sqrt[3]{3e^t + 2}\, e^t\, dt$$

e con il cambiamento di variabile $y = e^t$ l'ultimo termine diventa

$$= \sqrt{3} \int_1^{e^2} \sqrt[3]{3y + 2}\; dy = \left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\,(3y + 2)^{\frac{4}{3}} \right]_1^{e^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[\left(3e^2 + 2\right)^{\frac{4}{3}} - 5\sqrt[3]{5} \right] .$$

(c) Vedi libro di testo.

5. (Facoltativo) Si dimostri il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 1 Secondo compito in itinere 30 Gennaio 2012 Compito D	Docente:	Politecnico di Milano Ingegneria Industriale
Cognome:	Nome:	Matricola:

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate***. *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia β un parametro reale e sia $F : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$F(x) = \int_3^x \frac{t^\beta(\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1+t^4}}\,\mathrm{d}t\,.$$
   (a) Si mostri che, per ogni valore del parametro β, la funzione F è strettamente crescente sull'intervallo $[3, +\infty)$.
   (b) Si determinino, se esistono, i valori del parametro β in corrispondenza dei quali la funzione F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

   Soluzione.

   (a) Essendo una funzione integrale, la funzione F è derivabile su tutto l'intervallo su cui è definita e
$$F'(x) = \frac{x^\beta(\mathrm{e}^{1/x} - 1)}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,.$$
   Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$, la funzione F è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[3, +\infty)$.

   (b) La funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ quando esiste finito il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_3^x \frac{t^\beta(\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1+t^4}}\,\mathrm{d}t = \int_3^{+\infty} \frac{t^\beta(\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1+t^4}}\,\mathrm{d}t\,.$$
   Si tratta quindi di studiare la convergenza, al variare del parametro reale β, dell'integrale generalizzato
$$I = \int_3^{+\infty} \frac{t^\beta(\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1+t^4}}\,\mathrm{d}t\,.$$
   Come abbiamo già osservato, la funzione
$$f(t) = \frac{t^\beta(\mathrm{e}^{1/t} - 1)}{\sqrt[3]{1+t^4}}$$
   è strettamente positiva per ogni $t \geq 1$. Inoltre essa è continua per ogni $t \geq 1$. Infine, per $t \to +\infty$, si ha $1/t \to 0$ e quindi
$$f(t) \sim \frac{t^\beta\, 1/t}{t^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{t^{-\beta+\frac{7}{3}}}\,.$$
   Questa funzione, e quindi per il teorema dell'equivalenza asintotica anche la funzione $f(t)$, è integrabile esattamente per $-\beta + \frac{7}{3} > 1$, ossia per $\beta < \frac{4}{3}$.

2. (a) Si determini il valore del parametro reale k in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -4 - 3t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = k \end{cases}$$

siano incidenti esattamente in un punto P.

(b) Per il valore di k trovato nel punto precedente, si determinino le coordinate del punto P e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene entrambe le rette r ed s.

Soluzione.

3. Si consideri l'equazione differenziale $y' = ty + \dfrac{2t}{y}$.

   (a) Si trovi l'integrale generale (insieme di tutte le soluzioni) dell'equazione.

   (b) Si determini la soluzione $\bar{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui risulta $\bar{y}(0) = 1$.

Soluzione.

(a) L'equazione è a variabili separabili, poiché si può porre nella forma

$$y' = t\left(y + \frac{2}{y}\right),$$

ovvero

$$y' = t \cdot \frac{y^2 + 2}{y}.$$

Notiamo innanzitutto che l'espressione $\dfrac{y^2+2}{y}$ perde di significato quando $y = 0$, pertanto le eventuali soluzioni non possono assumere il valore 0 per alcun valore di t.

Poiché $\dfrac{y^2+2}{y}$ non si annulla per alcun valore di y, non ci sono soluzioni stazionarie. Le soluzioni sono quindi tutte e sole quelle che soddisfano la relazione

$$\int \frac{y}{y^2+2}\, dy = \int t\, dt.$$

Esplicitando la relazione si ottiene

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 + 2| = \frac{1}{2}t^2 + c.$$

Poiché $y^2 + 1$ è sempre positivo, si ottiene

$$\ln(y^2 + 2) = t^2 + 2c,$$

e quindi

$$y^2 + 2 = e^{t^2+2c} = e^{2c} \cdot e^{t^2}.$$

Poiché c è arbitraria, e^{2c} è una arbitraria costante positiva. In definitiva, si ottiene

$$y = \pm\sqrt{ke^{t^2} - 2} \qquad \text{con } k > 0.$$

(b) Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ottiene l'equazione $1 = \sqrt{k-2}$, soddisfatta per $k = 3$. Si ottiene quindi

$$\bar{y}(t) = \sqrt{3e^{t^2} - 2}.$$

Notiamo che risulta $3e^{t^2} - 2 > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Infatti risulta $t^2 \geq 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ e quindi $e^{t^2} \geq 1\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, da cui segue $3e^{t^2} \geq 3\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi considerare $\bar{y}$ come definita in tutto $\mathbb{R}$.

4. Sia

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^t \cos t \\ z = e^t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0,3] \, .$$

(a) Si trovino il versore tangente ed il versore normale in ogni punto di γ.

(b) Si calcoli

$$\int_\gamma f \, ds$$

dove $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{2y^2+2z^2}{x} + 1}$

(c) Si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Soluzione. (a) Posto $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t)$, abbiamo $\dot{\mathbf{r}}(t) = (e^t, e^t(\cos t - \sin t)\, , e^t(\cos t + \sin t))$ e quindi $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{3}\, e^t$, e

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos t - \sin t), \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos t + \sin t) \right) \, .$$

Essendo inoltre $\dot{\mathbf{T}}(t) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t - \cos t), \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\right)$ e $|\dot{\mathbf{T}}(t)| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ risulta

$$\mathbf{N}(t) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} (- \sin t - \cos t), \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t - \sin t) \right) \, .$$

(b)

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^3 \sqrt{\frac{2(e^t \cos t)^2 + 2(e^t \sin t)^2}{e^t} + 1} \, \sqrt{3}\, e^t \, dt = \sqrt{3} \int_0^3 \sqrt{2e^t + 1}\, e^t \, dt$$

e con il cambiamento di variabile $y = e^t$ l'ultimo termine diventa

$$= \sqrt{3} \int_1^{e^3} \sqrt{2y+1} \, dy = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} (2y+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[(2e^3 + 1)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{3} \right] \, .$$

(c) Vedi libro di testo.