POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE

ANALISI E GEOMETRIA 1 **Secondo appello – 9 Luglio 2012**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 10 punti	**Es. 3**: 7 punti	**Es. 4**: 7 punti	**Es. 5**: 2 punti	**Totale**

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^3 = \mathbf{i}\,|z|\,\overline{z}$$

e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

2. Data la funzione f definita da $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$,

   (a) mostrare che f è pari;

   (b) mostrare che f è limitata;

   (c) verificare che f è strettamente crescente per $x \geq 0$ senza calcolare la derivata prima;

   (d) mostrare che f è invertibile in $[0, +\infty)$ e determinare l'inversa g;

   (e) a partire dal grafico di f, disegnare il grafico di g precisandone il dominio e gli eventuali punti di flesso.

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,e^{y-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e specificare l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione.

4. Data la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \ln t \\ z = 2t + 1 \end{cases} \qquad t > 0\,,$$

determinare i versori tangente, normale, binormale e la curvatura nel punto $P \equiv (1, 0, 3)$.

5. (Domanda di teoria) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi per funzioni continue.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.

Tempo: due ore + 15 minuti per la domanda di teoria.

Soluzioni del compito A

1. (a) Essendo una funzione integrale, la funzione F è derivabile su tutto l'intervallo su cui è definita e
$$F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{x^\alpha \sqrt{1+x^3}} .$$
Poiché $F'(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$, la funzione F è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[1, +\infty)$.

(b) La funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ quando esiste finito il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1+t^3}} \, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1+t^3}} \, \mathrm{d}t .$$
Si tratta quindi di studiare la convergenza, al variare del parametro reale α, dell'integrale generalizzato
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1+t^3}} \, \mathrm{d}t .$$
Come abbiamo già osservato, la funzione
$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{1/t} - 1}{t^\alpha \sqrt{1+t^3}}$$
è positiva per ogni $t \geq 1$. Inoltre essa è continua per ogni $t \geq 1$. Infine, per $t \to +\infty$, si ha $1/t \to 0$ e quindi
$$f(t) \sim \frac{1/t}{t^\alpha t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t^{\alpha + \frac{5}{2}}} .$$
Questa funzione, e quindi per il teorema dell'equivalenza asintotica anche la funzione $f(t)$, è integrabile esattamente per $\alpha + \frac{5}{2} > 1$, ossia per $\alpha > -\frac{3}{2}$.

2. (a) Intersechiamo le due rette date. Sostituendo le coordinate del generico punto di r nella prima equazione che definisce s, si ottiene $t = 1$. Per questo valore del parametro t si ottiene il punto $P \equiv (2, 0, -1) \in r$. Sostituendo le coordinate di questo punto nella seconda equazione che definisce s, si ottiene $k = 3$. In conclusione, le due rette r ed s si intersecano esattamente in un punto P per $k = 3$.

(b) Per $k = 3$, come già trovato, si ha $P \equiv (2, 0, -1)$. Per determinare il piano π che contiene entrambe le rette r ed s si può procedere in almeno due modi.

i. **Primo modo.** Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ due vettori direttori rispettivamente di r e di s. Il piano π può essere determinato come il piano che passa per il punto P e che ha $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ come vettore direttore (ortogonale sia ad $\mathbf{a}$ che a $\mathbf{b}$). Poiché $\mathbf{a} = (1, -1, -3)$ e
$$\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \right) = (1, 2, -3) ,$$
si ha
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (9, 0, 3) .$$
Quindi l'equazione cartesiana di π è
$$9(x-2) + 0(y-0) + 3(z+1) = 0$$
ossia $\pi \, : \, 3x + z - 5 = 0$.

ii. **Secondo modo.** Sia Φ il fascio di piani che s come sostegno. Il piano π può essere determinato come il piano appartenente al fascio Φ che passa per il punto $Q \equiv (1,1,2)$ appartenete ad r (ottenuto per $t = 0$ e diverso da $P = r \cap s$). L'equazione del fascio Φ è

$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - 2y - z - 3) = 0\,.$$

Imponendo il passaggio per Q si ottiene $\lambda = 2\mu$. Quindi $\pi\ :\ 3x + z - 5 = 0$.

3. (a) L'equazione differenziale data è a variabili separabili. e ha la forma $y' = a(x)b(y)$, dove $a(x) = 1 + 2x$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ e $b(y) = y \ln y$ è di classe $\mathcal{C}^1$ per $y > 0$. Poiché le condizioni iniziali sono $x_0 = 0$ e $y_0 = \sqrt{\mathrm{e}} > 0$, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione (locale).

   (b) L'equazione data ha una sola soluzione particolare singolare data da $y(x) = 1$, ottenuta dagli zeri dall'equazione $b(y) = 0$, ossia $y \ln y = 0$. Supposto $y \neq 1$, possiamo separare le variabili, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = (1 + 2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

   Integrando, si ha

$$\ln|\ln y| = x + x^2 + c$$

   dove c è una qualsiasi costante reale. Si ha

$$|\ln y| = \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{x+x^2} = K\mathrm{e}^{x+x^2}$$

   dove $K = \mathrm{e}^c$ è una qualsiasi costante reale positiva. Eliminando il modulo, si ha

$$\ln y = \pm K\mathrm{e}^{x+x^2} = k\mathrm{e}^{x+x^2}$$

   dove $k = \pm K$ è una qualsiasi costante reale non nulla. Si noti che per $k = 0$ si ha la soluzione singolare ottenuta precedentemente. Quindi possiamo inglobare questa soluzione nella scrittura precedente ammettendo che k possa anche essere nullo. Quindi, la soluzione generale del"equazione differenziale data è

$$y(x) = \mathrm{e}^{k\mathrm{e}^{x+x^2}}\,.$$

   Ora, imponendo la condizione iniziale $y(0) = \sqrt{\mathrm{e}}$, si ha $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^k$, ossia $k = 1/2$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x+x^2}}$$

   ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

4. Si ha

$$\begin{cases} x' = (2+t)\,\mathrm{e}^t \\ y' = -t\,\mathrm{e}^t \\ z' = (1+t)\,\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = (3+t)\,\mathrm{e}^t \\ y'' = -(1+t)\,\mathrm{e}^t \\ z'' = (2+t)\,\mathrm{e}^t\,. \end{cases}$$

   (a) Poiché x', y' e z' non si annullano mai per uno stesso valore del parametro t, la curva γ è regolare.

   (b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale, definita da $f(t) = ((1+t)\,\mathrm{e}^t, (1-t)\,\mathrm{e}^t, t\,\mathrm{e}^t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, che rappresenta la curva γ. Si ha

$$f'(t) \wedge f''(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2+t & -t & 1+t \\ 3+t & -1-t & 2+t \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\ (1, -1, -2)$$

   e

$$||f'(t) \wedge f''(t)|| = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Quindi, il versore binormale è

$$\mathbf{b} = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{||f'(t) \wedge f''(t)||} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

(c) Poiché versore binormale è costante, la curva γ è piana. L'equazione del piano π che la contiene è $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$, dove $\mathbf{x}_0$ è il vettore posizione di un qualunque punto P di γ. Ad esempio, per $t = 0$ si ottiene il punto $P \equiv (1, 1, 0)$. Quindi l'equazione cartesiana di π è

$$1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) - 2 \cdot (z - 0) = 0$$

ossia $\pi \,:\, x - y - 2z = 0$.