Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Seconda prova in itinere – 4 Febbraio 2013**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 8 punti	**Es. 4**: 8 punti	**Totale**

1. Sia
$$f(x) = \frac{x^2 - 2\,\mathrm{artg}\,x + 2\ln(1+x)}{\sqrt{x}\sin(x^3)}\,.$$
   (a) Determinare i valori dei parametri reali K e α per i quali risulta
$$f(x) \sim Kx^\alpha \quad \text{per } x \to 0^+\,.$$
   (b) Enunciare il criterio del confronto asintotico sulla integrabilità (in senso generalizzato) in un intervallo $[a,b]$ delle funzioni positive e continue in $(a,b]$.
   (c) Utilizzare i risultati precedenti per stabilire se l'integrale
$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
   è convergente.

2. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(x) + \frac{1}{x+x^2}\,y(x) = (1+x)\,\ln x\,, \qquad \text{dove } x \in (0,+\infty)\,.$$
   (a) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta e descrivere la forma del suo integrale generale.
   (b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.
   (c) Individuare la soluzione il cui grafico passa per il punto $P \equiv (1,0)$.

3. Data la famiglia delle curve γ_a di $\mathbb{R}^3$, dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$, di equazioni parametriche
$$\gamma_a : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t+1 \\ z = at^3 + t^2 + 2t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$
   (a) determinare il valore $\overline{a}$ del parametro per il quale la curva $\gamma_{\overline{a}}$ è piana;
   (b) determinare il piano π contenente $\gamma_{\overline{a}}$;
   (c) determinare i versori tangente $\mathbf{t}$, normale $\mathbf{n}$ e binormale $\mathbf{b}$ nel punto $P \equiv (1,2,5)$ appartenente alla curva γ_1, corrispondente al valore $a = 1$;
   (d) determinare il centro C della circonferenza osculatrice relativa al punto $P \in \gamma_1$.

4. Dati i tre punti $A \equiv (1,1,0)$, $B \equiv (0,1,1)$, $C \equiv (1,0,1)$ di $\mathbb{R}^3$,
   (a) mostrare che non sono allineati;
   (b) determinare il piano π che li contiene;
   (c) determinare la retta r perpendicolare a π passante per il punto $O \equiv (0,0,0)$;
   (d) determinare la distanza di O da π.

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzioni del compito A

1. (a) Utilizzando la formula di MacLaurin arrestata al terzo ordine, per $x \to 0$, si ottiene:

$$\operatorname{artg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,,$$

e quindi

$$x^2 - 2\operatorname{artg} x + 2\ln(1+x) = \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3) \sim \frac{4}{3}\,x^3\,.$$

Inoltre, per $x \to 0^+$, si ha

$$\sqrt{x}\,\sin(x^3) = \sqrt{x}\,(x^3 + o(x^3)) \sim \sqrt{x}\,x^3\,.$$

Quindi, per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{\frac{4}{3}\,x^3}{\sqrt{x}\,x^3} = \frac{4}{3}\,x^{-1/2}\,.$$

In conclusione, si ha

$$K = \frac{4}{3} \qquad \text{e} \qquad \alpha = -\frac{1}{2}\,.$$

(b) Siano f e g due funzioni continue e positive in un intervallo $(a,b]$ e tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$. Allora f è integrabile in $[a,b]$ se e solo se g è integrabile in $[a,b]$.

(c) La funzione f è definita e continua in $(0,1]$. Poiché

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\,\frac{1}{x^{1/2}} \qquad \text{per } x \to 0^+\,,$$

è anche sicuramente positiva in un (opportuno) intorno destro di 0 (in realtà, è positiva in tutto l'intervallo $(0,1]$). Inoltre, poiché la funzione $\frac{1}{x^{1/2}}$ è integrabile in un (qualunque) intorno destro di 0 (essendo del tipo $1/x^a$ con $a < 1$), dal criterio del confronto asintotico si ha che f è integrabile in un (opportuno) intorno destro di 0, e quindi che è integrabile in $[0,1]$.

2. (a) Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine, cioè di un'equazione differenziale del tipo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)\,,$$

dove p e q sono due funzioni definite e continue su un opportuno intervallo I. L'integrale generale di questa equazione, sull'intervallo I, è

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} q(x)\,\mathrm{d}x + c\right]$$

dove c è una costante reale arbitraria.

(b) Per l'equazione data, si ha

$$p(x) = \frac{1}{x+x^2} \qquad \text{e} \qquad q(x) = (1+x)\ln x\,.$$

Entrambe queste funzioni sono definite e continue in $I = (0,+\infty)$. Poiché

$$p(x) = \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,,$$

per $x > 0$, si ha

$$\int \frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C = \ln\frac{x}{x+1} + C\,.$$

Inoltre, si ha

$$\int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} q(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x+1}(x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \int x\ln x\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + c\,.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = \frac{x+1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + c\right)\,.$$

(c) Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 0$, si ottiene

$$2\left(-\frac{1}{4} + c\right) = 0\,,$$

da cui si ottiene $c = 1/4$. La soluzione cercata è quindi

$$\bar{y}(x) = \frac{x+1}{x}\left(\frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\,.$$

3. (a) Consideriamo un generico piano di equazione $Ax + By + Cz + D = 0$. Questo piano contiene la curva γ_a se e solo se

$$At^2 + B(t+1) + C(at^3 + t^2 + 2t + 1) + D = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

ossia se e solo se

$$aCt^3 + (A+C)t^2 + (B+2C)t + (B+C+D) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

ossia se e solo se

$$\begin{cases} aC = 0 \\ A + C = 0 \\ B + 2C = 0 \\ B + C + D = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} aC = 0 \\ A = -C \\ B = -2C \\ D = C\,. \end{cases}$$

Se $C = 0$, allora si ha $A = B = C = D = 0$, che non è una soluzione accettabile. Pertanto, deve essere $\overline{a} = 0$. In questo caso, si trova che la curva è contenuta nel piano di equazione

$$x + 2y - z - 1 = 0\,.$$

Equivalentemente, si può cercare il valore del parametro per cui il versore binormale è costante. Il piano ottenuto è il piano osculatore in un punto qualunque della curva.

(b) Si veda il punto precedente.

(c) Per $a = 1$, si ha

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \\ z = t^3 + t^2 + 2t + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2t \\ y' = 1 \\ z' = 3t^2 + 2t + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = 0 \\ z'' = 6t + 2\,. \end{cases}$$

Il punto P si ottiene per $t = 1$. Quindi $f'(1) = (2,1,7)$ e $f''(1) = (2,0,8)$. Di conseguenza, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(1) &= \frac{f'(1)}{||f'(1)||} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\,(2,1,7) \\
\mathbf{b}(1) &= \frac{f'(1)\wedge f''(1)}{||f'(1)\wedge f''(1)||} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\,(8,-2,-2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,(4,-1,-1) \\
\mathbf{n}(1) &= \mathbf{b}(1)\wedge\mathbf{t}(1) = \frac{1}{36\sqrt{3}}\,(-12,-60,12) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,(-1,-5,1)\,.
\end{aligned}$$

(d) Poiché la curvatura in P è

$$\kappa(1) = \frac{||f'(1) \wedge f''(1)||}{||f'(1)||^3} = \frac{1}{27\sqrt{3}}\,,$$

il raggio della circonferenza osculatrice è $r(1) = 1/\kappa(1) = 27\sqrt{3}$ e il suo centro è

$$C = P + r(1)\,\mathbf{n}(1) = f(1) + r(1)\,\mathbf{n}(1) = (1,2,5) + \frac{27\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(-1,-5,1) = (-8,-43,14)\,.$$

4. (a) Poiché i vettori $B - A = (-1,0,1)$ e $C - A = (0,-1,1)$ non sono paralleli, i tre punti dati non sono allineati ed esiste quindi un solo piano π che li contiene tutti.

(b) Poiché i tre punti dati hanno le stesse coordiante, a meno dell'ordine, si ottiene immediatamente che $x + y + z = 2$. L'equazione trovata è l'equazione del piano che li contiene.

(c) Poichè i parametri direttori di π sono $(1:1:1)$, si ha

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t\,. \end{cases}$$

(d) Usando la formula della distanza punto–piano, si ha

$$d(O,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$