Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Primo appello – 18 Febbraio 2013**

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Compito A

Es. 1: 9 punti	**Es. 2**: 6 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 9 punti	**Totale**

1. (a) Scrivere la definizione di: $g(x) = o(h(x))$, per $x \to a$.

   (b) Sia f una funzione derivabile n volte in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Scrivere la formula di Taylor di ordine n di f, con il centro in x_0 e il resto nella forma di Peano.

   (c) Calcolando le opportune derivate, trovare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \operatorname{tg} x$, con centro in $x_0 = 0$, arrestato al terzo ordine, con il resto di Peano.

   (d) Calcolare il limite
   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 + \ln(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}\,.$$

2. (a) Trovare la soluzione $f = f(t)$ del problema di Cauchy:
   $$\begin{cases} x'(t) = 4t^3\, x(t) \\ x(1) = -1\,. \end{cases}$$

   (b) Trovare il valore minimo e il valore massimo di f sull'intervallo $[1,3]$.

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche
   $$\gamma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi] \quad (\text{con } r > 0)$$
   munita della densità di massa $\delta(\theta) = e^\theta$.

   (a) Calcolare la massa totale della curva γ.

   (b) Calcolare le coordinate del baricentro della curva γ.

4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, sia r la retta passante per i punti $A \equiv (1,0,2)$ e $B \equiv (3,4,1)$, e sia s la retta intersezione dei piani $\pi_1 \,:\, x - 2y - 1 = 0$ e $\pi_2 \,:\, y + z = 0$.

   (a) Stabilire se r ed s sono incidenti, parallele o sghembe.

   (b) Nel fascio Φ di piani che ha per sostegno la retta s, determinare il piano π parallelo alla retta r.

   (c) Calcolare la distanza tra le rette r e s.

Istruzioni: Tutte le risposte devono essere motivate. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici. I fogli di brutta non devono essere consegnati.
Punteggio minimo per superare la prova: 18 punti.
Tempo della prova: due ore.

Soluzioni del compito A

1. (a) Vedere libro di testo.

   (b) Vedere libro di testo.

   (c) Si ha

$$
\begin{aligned}
&T(x) = \operatorname{tg} x && T(0) = 0 \\
&T'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x && T'(0) = 1 \\
&T''(x) = 2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x && T''(0) = 0 \\
&T'''(x) = 2(1+\operatorname{tg}^2 x) + 6\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg} x + 8\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg}^4 x && T'''(0) = 2\,.
\end{aligned}
$$

   Quindi, per $x \to 0$, si ha lo sviluppo

$$\operatorname{tg} x = T(0) + T'(0)\,x + \frac{T''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{T'''(0)}{3!}\,x^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,.$$

   (d) Utilizziamo gli sviluppi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

   (validi per $x \to 0$), si ha

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 + \ln(1-x)}{\operatorname{tg} x - x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

2. (a) L'equazione differenziale $x'(t) = 4t^3\,x(t)$ è sia a variabili separabili sia lineare omogenea del primo ordine. Risolvendola come equazione a variabili separabili, si ha la soluzione singolare identicamente nulla $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, che però non soddisfa la condizione iniziale $x(1) = -1$. Vicino a $x_0 = 1$, la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy si manterrà sicuramente diversa da zero (più precisamente si manterrà negativa, poiché $x(1) = -1$). Allora, dividendo per $x(t)$, si ha

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 4t^3$$

   da cui, integrando, si ricava $\ln|x(t)| = t^4 + c$, dove c è un'arbitraria costante reale. Da qui, si ha $|x(t)| = C\mathrm{e}^{t^4}$, con $C = \mathrm{e}^c$ arbitraria costante reale positiva. Equivalentemente, si ha $x(t) = Ke^{t^4}$, con K arbitraria costante reale non nulla. Imponendo la condizione $x(1) = -1$, s ottiene $K = -1/\mathrm{e}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$f(t) = -\frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{t^4} = -\mathrm{e}^{t^4-1}\,.$$

   (Controllare la soluzione con un calcolo diretto).

   (b) Sull'intervallo $I = [1,3]$ la funzione $f(t) = -\mathrm{e}^{t^4-1}$ è strettamente decrescente (porché $f'(t) < 0$ per ogni $t \in I$). Quindi il valore massimo M e il valore minimo m sono assunti agli estremi dell'intervallo $I = [1,3]$: $M = f(1) = -1$ e $m = f(3) = -\mathrm{e}^{3^4-1} = -\mathrm{e}^{80}$.

3. Indicata con $f(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, si ha $f'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ e $||f'(\theta)|| = r$.

   (a) La massa totale di γ è

$$M = \int_\gamma \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi \delta(\theta) \, ||f'(\theta)|| \, \mathrm{d}\theta = r \int_0^\pi \mathrm{e}^\theta \, \mathrm{d}\theta = r(\mathrm{e}^\pi - 1) \, .$$

   (b) Le coordinate del baricentro B di γ sono

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{M} \int_\gamma \delta \, x \, \mathrm{d}s = \frac{1}{M} \int_0^\pi \delta(\theta) \, x(\theta) \, ||f'(\theta)|| \, \mathrm{d}\theta = \frac{r^2}{M} \int_0^\pi \mathrm{e}^\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\ y_B &= \frac{1}{M} \int_\gamma \delta \, y \, \mathrm{d}s = \frac{1}{M} \int_0^\pi \delta(\theta) \, y(\theta) \, ||f'(\theta)|| \, \mathrm{d}\theta = \frac{r^2}{M} \int_0^\pi \mathrm{e}^\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, . \end{aligned}$$

   Integrando due volte per parti, si ha

$$\int \mathrm{e}^\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^\theta \cos\theta + \int \mathrm{e}^\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^\theta \cos\theta + \mathrm{e}^\theta \sin\theta - \int \mathrm{e}^\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta$$

   da cui si ottiene

$$\int \mathrm{e}^\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2} \, (\cos\theta + \sin\theta) \, .$$

   Integrando ancora per parti e usando l'integrale appena trovato, si ha

$$\int \mathrm{e}^\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^\theta \sin\theta - \int \mathrm{e}^\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2} \, (\sin\theta - \cos\theta) \, .$$

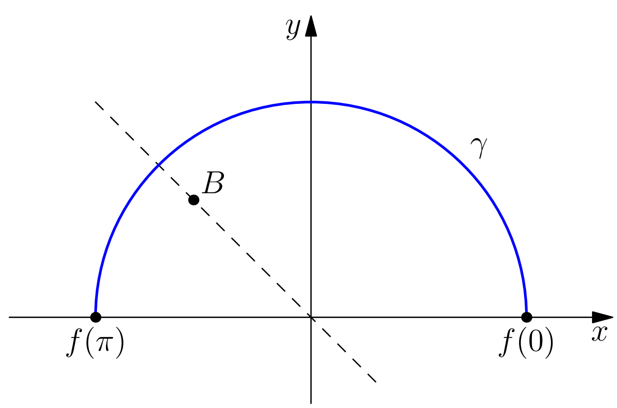
   Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{r^2}{r(\mathrm{e}^\pi - 1)} \left[\frac{\mathrm{e}^\theta}{2} \, (\sin\theta + \cos\theta) \right]_0^\pi = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1} \, \frac{r}{2} \\ y_B &= \frac{r^2}{r(\mathrm{e}^\pi - 1)} \left[\frac{\mathrm{e}^\theta}{2} \, (\sin\theta - \cos\theta) \right]_0^\pi = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1} \, \frac{r}{2} \, . \end{aligned}$$

   In conclusione, si ha

$$B \equiv \left(-\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1} \, \frac{r}{2}, \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1} \, \frac{r}{2} \right) \, .$$

   Osservazione. Per la posizione del baricentro rispetto alla curva, si veda la figura seguente



4. (a) Un vettore direttore di r è dato da $B - A = (2, 4, -1)$. Quindi le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - t \, . \end{cases}$$

I parametri direttori di s sono $(2:1:-1)$. Poiché i parametri direttori delle due rette non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Intersecando r ed s non si trovano punti in comune. Quindi le due rette sono sghembe.

(b) Il fascio di piani che ha s come sostegno ha equazione

$$\Phi \ : \ \lambda(x-2y-1)+\mu(y+z)=0\,,$$

ossia

$$\Phi \ : \ \lambda x+(-2\lambda+\mu)y+\mu z-\lambda=0\,.$$

Il generico piano del fascio ha vettore normale $(\lambda, -2\lambda+\mu, \mu)$. Imponendo la condizione di ortogonalità tra questo vettore e il vettore direttore di r, si ha $2\lambda+4(-2\lambda+\mu)-\mu=0$, ossia $-6\lambda+3\mu=0$, da cui $\mu=2\lambda$. Il piano π del fascio parallelo a r ha equazione $x+2z-1=0$.

(c) La distanza tra le due rette si può calcolare come la distanza di un punto qualunque $P\in r$ da π. Quindi, scelto $P=A$, si ha

$$d(r,s)=d(A,\pi)=\frac{|1+4-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\,.$$