Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Secondo appello – 8 Luglio 2013**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 8 punti	**Totale**

1. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases} \qquad t \in [0,2] .$$

(a) Trovare i versori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ della terna fondamentale nel punto P della curva γ corrispondente al parametro $t = 1$.

(b) Supponiamo che la curva assegnata γ rappresenti un filo, la cui densità lineare di massa sia $\delta(t) = 1 + t$ grammi per unità di lunghezza. Trovare la massa totale, in grammi, del filo.

2. (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = (y-1)\cos x .$$

(b) Trovare la soluzione $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)\cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale sul quale si può estendere. Disegnare un grafico qualitativo della soluzione $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, in un intorno di $x_0 = 0$.

3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = 1 - u . \end{cases}$$

(a) Stabilire se esiste un piano che contenga entrambe le rette r ed s.

(b) Trovare un'equazione cartesiana per il piano π che contiene la retta r e che passa per l'origine.

4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo locale.

(b) Trovare gli eventuali asintoti.

(c) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to 0^+} f'(x) .$$

(d) Stabilire se la funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

definita sull'intervallo $[1, +\infty)$, ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Soluzioni

1. (a) Si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= (3t, 3t^2, 2t^3) & f(1) &= (3,3,2) \\ f'(t) &= (3, 6t, 6t^2) = 3(1, 2t, 2t^2) & f'(1) &= (3,6,6) = 3(1,2,2) \\ f''(t) &= (0, 6, 12t) = 6(0,1,2t) & f''(1) &= (0,6,12) = 6(0,1,2)\,. \end{aligned}$$

Poiché $||f'(1)|| = 3\sqrt{9} = 9$, si ha

$$\mathbf{t}(1) = \frac{f'(1)}{||f'(1)||} = \frac{1}{3}\,(1,2,2)\,.$$

Poiché

$$f'(1) \wedge f''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18\,(2,-2,1)$$

e

$$||f'(1) \wedge f''(1)|| = 18 \cdot \sqrt{9} = 18 \cdot 3\,,$$

si ha

$$\mathbf{b}(1) = \frac{f'(1) \wedge f''(1)}{||f'(1) \wedge f''(1)||} = \frac{1}{3}\,(2,-2,1)\,.$$

Infine, si ha

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \wedge \mathbf{t}(1) = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\,(-6,-3,6) = \frac{1}{3}\,(-2,-1,2)\,.$$

(b) L'elemento di lunghezza della curva γ è

$$ds = ||f'(t)||\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\,\mathrm{d}t = 3(1+2t^2)\,dt\,.$$

La massa totale è

$$M = \int_\gamma \delta\ \mathrm{d}s = \int_0^2 \delta(t)||f'(t)||\,\mathrm{d}t = 3\int_0^2 (1+t)(1+2t^2)\,\mathrm{d}t = 3\int_0^2 (1+t+2t^2+2t^3)\,\mathrm{d}t = 52\,.$$

2. (a) L'equazione data può essere vista come un'equazione a variabili separabili. Una soluzione è la funzione costante $y(x) = 1$ (che annulla il secondo membro). Per trovare le altre soluzioni, procediamo separando le variabili:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y-1} = \cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrando, si ha

$$\ln|y-1| = \sin x + c\,,$$

ossia

$$|y-1| = \mathrm{e}^{\sin x + c}$$

ossia

$$y = 1 \pm \mathrm{e}^c\,\mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

Quindi, la soluzione generale è

$$y(x) = 1 + Ke^{\sin x} \qquad K \in \mathbb{R}$$

(includendo, per $K = 0$, anche la soluzione costante $y(x) = 1$).

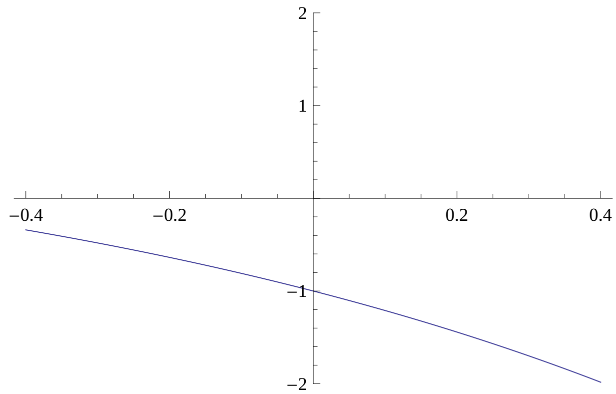
(b) Dall'espressione della soluzione generale si ottiene $y(0) = K + 1$. Quindi si ha $y(0) = -1$ per $K = -2$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è

$$\widetilde{y}(x) = 1 - 2e^{\sin x}.$$

L'intervallo massimale a cui si può estendere questa soluzione è tutto $\mathbb{R}$. Infine, poiché per $x \to 0$ si ha

$$\widetilde{y}(x) = -1 - 2x - x^2 + o(x^2),$$

il grafico di questa funzione vicino all'origine è dato da



3. (a) Un vettore direttore di r è $\mathbf{a} = (1, 3, 2)$ e un vettore direttore di s è $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$. Poiché $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non sono proporzionali, le rette r ed s non sono parallele. Quindi, o sono incidenti, o sono sghembe. Il sistema lineare di tre equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 3 + t = u \\ 1 + 3t = 1 \\ 2t = 1 - u \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 3 \\ t = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

non ha soluzioni, ossia r ed s non sono incidenti. Dunque sono sghembe e, di conseguenza, non sono complanari.

(b) Eliminando il parametro dalla prima equazione di r, si trova

$$r : \begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ 2x - z - 6 = 0. \end{cases}$$

Il fascio di piani che ha r come sostegno ha equazione

$$\Phi : \lambda(3x - y - 8) + \mu(2x - z - 6) = 0.$$

Imponendo il passaggio per $O \equiv (0, 0, 0)$, si ha $4\lambda + 3\mu = 0$, e quindi $\lambda = 3k$ e $\mu = -4k$. Pertanto, il piano cercato è

$$x - 3y + 4z = 0.$$

4. (a) Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2 - x^2}{x^4}\, e^{-\frac{2}{x}}, \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Segno di f': $f'(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < +\sqrt{2}$. Quindi in $x_0 = -\sqrt{2}$ si ha un punto di minimo locale, mentre in $x_1 = \sqrt{2}$ si ha punto di massimo locale.

(b) Si ha la retta di equazione $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Si ha poi la retta di equazione $x = 0$ come asintoto verticale per $x \to 0^-$. Più precisamente, si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

(c) Si ha

$$L = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-x^2}{x^4}\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} = 0\,.$$

(d) Si tratta di stabilire se esiste finito l'integrale generalizzato

$$I = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poiché, per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} \sim \frac{1}{x}\,,$$

l'integrale I non è convergente (vale $+\infty$). Pertanto la funzione $F(x)$ non ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Oss. Il grafico della funzione f è