Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere – 3 Febbraio 2014**

Cognome: ______________________ **Compito A**

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. (a) Determinare l'integrabilità della funzione

$$f(t) = \frac{(1-\mathbf{e}^{-t})^2}{\mathbf{e}^{2t}-1}$$

sull'intervallo $(0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\mathbf{e}^{-t})^2}{\mathbf{e}^{2t}-1}\, \mathrm{d}t\,.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \mathbf{e}^x - 2\mathbf{e}^{x-y}\,,$$

dove $y = y(x)$.

(a) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta.

(b) Determinare le eventuali soluzioni stazionarie (cioé quelle del tipo $y(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$).

(c) Individuare la soluzione $\bar{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che passa per il punto $(0,1)$.

(d) Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado due della funzione $\overline{y}$, senza calcolare esplicitamente le derivate di $\overline{y}$ nel generico punto x di $\mathbb{R}$.

3. Sia γ la curva di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\,\dfrac{t^3}{3} \\ z = \dfrac{t^4}{4} \end{cases} \qquad t \in [1,2]\,.$$

(a) Determinarne la lunghezza L di γ.

(b) Determinare il piano osculatore π_0 a γ nel punto $P_0 \equiv (1, \frac{4}{3}, 1) \in \gamma$.

(c) Determinare la curvatura κ_0 e il raggio di curvatura ρ_0 di γ nel punto P_0.

(d) Determinare il centro C_0 della circonferenza osculatrice nel punto P_0.

4. Nello spazio riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, sia $P \equiv (-1,2,3)$ e sia r la retta che si ottiene intersecando i due piani $\pi_1 : -x+2y+3z+1=0$ e $\pi_2 : x+y+z=0$.

(a) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π ortogonale a r che passa per P.

(b) Determinare le coordinate del punto P'' simmetrico di P rispetto a r.

Tutte le risposte devono essere motivate. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

Soluzioni

1. (a) Poiché $f(t) \geq 0$, $f(t) \sim \frac{t}{2}$ per $t \to 0^+$ e $f(t) \sim \mathbf{e}^{-2t}$ per $t \to +\infty$, si ha che f è integrabile su tutto l'intervallo $(0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$.

   (b) Posto $x = \mathbf{e}^t$, si ha $t = \log x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/x$, e

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \mathbf{e}^{-t})^2}{\mathbf{e}^{2t} - 1}\, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{(1 - x^{-1})^2}{x^2 - 1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{x - 1}{x^3(x+1)}\, \mathrm{d}x .$$

La funzione razionale integranda ammette lo spezzamento in frazioni semplici

$$\frac{x-1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

per degli opportuni coefficienti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Poiché si ha

$$\frac{x-1}{x^3(x+1)} = \frac{(A+D)x^3 + (A+B)x^2 + (B+C)x + C}{x^3(x+1)}$$

deve essere

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ A + B = 0 \\ B + C = 1 \\ C = -1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \\ C = -1 \\ D = 2 . \end{cases}$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \left(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[-2 \ln |x| + 2 \ln |x+1| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_1^{+\infty} \\ &= \left[2 \ln \frac{x+1}{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_1^{+\infty} \\ &= -\left(2 \ln 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \ln 4 . \end{aligned}$$

2. (a) Poiché si può porre nella forma $y' = \mathbf{e}^x (1 - 2\mathbf{e}^{-y})$, l'equazione è del tipo $y' = a(x)b(y)$ con $a(x) = \mathbf{e}^x$ e $b(y) = 1 - 2\mathbf{e}^{-y}$. Quindi è a variabili separabili.

   (b) Le soluzioni stazionarie sono le soluzioni dell'equazione $b(y) = 0$, ossia dell'equazione $1 - 2\mathbf{e}^{-y} = 0$, equivalente all'equazione $\mathbf{e}^y - 2 = 0$, la cui unica soluzione è $y = \ln 2$.

   (c) Le altre soluzioni si ottengono separando le variabili e integrando:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1 - 2\mathbf{e}^{-y}} = \int \mathbf{e}^x\, \mathrm{d}x \qquad \text{ossia} \qquad \int \frac{\mathbf{e}^y}{\mathbf{e}^y - 2}\, \mathrm{d}y = \int \mathbf{e}^x\, \mathrm{d}x ,$$

da cui si ottiene

$$\ln |\mathbf{e}^y - 2| = \mathbf{e}^x + c \qquad c \in \mathbb{R} ,$$

da cui segue

$$|\mathbf{e}^y - 2| = \mathbf{e}^{\mathbf{e}^x + c} = \mathbf{e}^c\, \mathbf{e}^{\mathbf{e}^x} \qquad c \in \mathbb{R} ,$$

ossia

$$|\mathbf{e}^y - 2| = k\, \mathbf{e}^{\mathbf{e}^x} \qquad k \in (0, +\infty) .$$

Di conseguenza, risulta

$$\mathbf{e}^y - 2 = \pm k\, \mathbf{e}^{\mathbf{e}^x} \qquad k \in (0, +\infty) ,$$

ossia

$$\mathbf{e}^y - 2 = K\,\mathbf{e}^{\mathbf{e}^x} \qquad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

da cui si ottiene l'integrale generale

$$y(x) = \ln\left(2 + K\,\mathbf{e}^{\mathbf{e}^x}\right) \qquad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Osservando che per $K = 0$ si ottiene la soluzione stazionaria $y(x) = \ln 2$, si ha che le soluzioni dell'equazione differenziale di partenza sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(x) = \ln\left(2 + K\,\mathbf{e}^{\mathbf{e}^x}\right) \qquad K \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo il passaggio per il punto $(0,1)$, si ottiene $1 = \ln(2 + K\mathbf{e})$, da cui segue $2 + K\mathbf{e} = \mathbf{e}$, ossia $K = 1 - \frac{2}{\mathbf{e}}$. Sostituendo tale valore di K nell'integrale generale, si ottiene la soluzione

$$\overline{y}(x) = \ln\left(2 + \left(1 - \frac{2}{\mathbf{e}}\right)\mathbf{e}^{\mathbf{e}^t}\right) = \ln\left(2 + (\mathbf{e}-2)\,\mathbf{e}^{\mathbf{e}^t - 1}\right)\,.$$

Poiché $1 - \frac{2}{e}$ è positivo, la soluzione $\overline{y}$ è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$.

(d) Poiché $\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione differenziale di partenza, si ha

$$\begin{aligned}\overline{y}\,'(x) &= \mathbf{e}^x - 2\,\mathbf{e}^{x-\overline{y}(x)}\\ \overline{y}\,''(x) &= \mathbf{e}^x - 2\,\mathbf{e}^{x-\overline{y}(x)}\,(1 - \overline{y}\,'(x))\,.\end{aligned}$$

Pertanto, utilizzando la condizione iniziale, si ha

$$\begin{aligned}&\overline{y}(0) = 1\\ &\overline{y}\,'(0) = \mathbf{e}^0 - 2\mathbf{e}^{0-\overline{y}(0)} = 1 - 2\mathbf{e}^{-1}\\ &\overline{y}\,''(0) = \mathbf{e}^0 - 2\,\mathbf{e}^{0-\overline{y}(0)}\,(1 - \overline{y}\,'(0)) = 1 - 2\mathbf{e}^{-1}\,2\mathbf{e}^{-1} = 1 - 4\mathbf{e}^{-2}\,.\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di MacLaurin di grado due di $\overline{y}$ è

$$1 + (1 - 2\mathbf{e}^{-1})\,x + (1 - 4e^{-2})\frac{x^2}{2}\,.$$

3. (a) Sia $f(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \sqrt{2}\,\frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4}\right)$. Allora si ha $f'(t) = (t, \sqrt{2}\,t^2, t^3)$ e $||f'(t)|| = t(1+t^2)$, per ogni $t \in [1,2]$. Quindi la curva γ è regolare e

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_1^2 ||f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_1^2 = \frac{21}{4}\,.$$

(b) Il punto $P_0 \in \gamma$ corrisponde al valore $t_0 = \sqrt{2}$ del parametro, ossia $P_0 = f(\sqrt{2})$. Poiché $f''(t) = (1, 2\sqrt{2}\,t, 3t^2)$, si ha

$$\begin{aligned}f(\sqrt{2}) &= \left(1, \frac{4}{3}, 1\right)\\ f'(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})\\ f''(\sqrt{2}) &= (1, 4, 6)\end{aligned}$$

e

$$f'(\sqrt{2}) \wedge f''(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix} = \sqrt{2}\,(4,-4,2) = 2\sqrt{2}\,(2,-2,1)\,.$$

Pertanto, se $X \equiv (x,y,z)$, il piano osculatore a γ in P_0 ha equazione

$$\langle f'(\sqrt{2}) \wedge f''(\sqrt{2}), X - P_0\rangle = 0$$

ossia

$$\langle (2,-2,1), (x-1, y - \frac{4}{3}, z-1)\rangle = 0$$

ossia

$$\pi_0\ :\ 6x - 6y + 3z - 1 = 0\,.$$

(c) Poiché $||f'(\sqrt{2})|| = 3\sqrt{2}$ e $||f'(\sqrt{2}) \wedge f''(\sqrt{2})|| = 6\sqrt{2}$, si ha

$$\kappa_0 = \frac{||f'(\sqrt{2}) \wedge f''(\sqrt{2})||}{||f'(\sqrt{2})||^3} = \frac{6\sqrt{2}}{(3\sqrt{2})^3} = \frac{1}{9} \qquad \text{e} \qquad \rho_0 = \frac{1}{\kappa_0} = 9\,.$$

(d) Il centro della circonferenza osculatrice è

$$C_0 = f(\sqrt{2}) + \rho_0\,\mathbf{n}(\sqrt{2}) = P_0 + \rho_0\,\mathbf{n}(\sqrt{2})\,,$$

dove $\mathbf{n}(\sqrt{2})$ è il versore normale a γ in P_0. Poiché il versore tangente e il versore binormale sono rispettivamente

$$\mathbf{t}(\sqrt{2}) = \frac{f'(\sqrt{2})}{||f'(\sqrt{2})||} = \frac{\sqrt{2}\,(1,2,2)}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\,(1,2,2)$$
$$\mathbf{b}(\sqrt{2}) = \frac{f'(\sqrt{2}) \wedge f''(\sqrt{2})}{||f'(\sqrt{2}) \wedge f''(\sqrt{2})||} = \frac{2\sqrt{2}\,(2,-2,1)}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\,(2,-2,1)\,,$$

il versore normale è

$$\mathbf{n}(\sqrt{2}) = \mathbf{b}(\sqrt{2}) \wedge \mathbf{t}(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(-6,-3,6) = \frac{1}{3}(-2,-1,2)\,.$$

In conclusione, si ha

$$C_0 = \left(1, \frac{4}{3}, 1\right) + 9\,\frac{1}{3}\,(-2,-1,2) = \left(1, \frac{4}{3}, 1\right) + 3\,(-2,-1,2) = \left(-5, -\frac{5}{3}, 7\right).$$

4. (a) Le direzioni ortogonali ai piani π_1 e π_2 sono individuate rispettivamente dai vettori $\mathbf{a}_1 = (-1,2,3)$ e $\mathbf{a}_2 = (1,1,1)$. Pertanto la direzione di r è individuata dal vettore

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,4,-3)\,.$$

Il piano ortogonale a r passante per il punto $P \equiv (-1,2,3)$ è

$$\pi \;:\; -1(x+1) + 4(y-2) - 3(z-3) = 0$$

ossia $\pi \;:\; x - 4y + 3z = 0$.

(b) Poiché $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0) \in r$, la retta r ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = -\frac{1}{3} + 4t \\ z = -3t\,. \end{cases}$$

La proiezione ortogonale di P su r è il punto P' intersezione fra la retta r e il piano π. Intersecando r con π, si ha

$$\frac{1}{3} - t - 4\left(-\frac{1}{3} + 4t\right) + 3(-3t) = 0\,,$$

da cui si ottiene il valore

$$t = \frac{5}{3 \cdot 26}\,.$$

Pertanto, si ha

$$P' \equiv \left(\frac{7}{26}, -\frac{1}{13}, -\frac{5}{26}\right).$$

Poiché il punto P' è il punto medio del segmento che ha per estremi i punti P e P'', posto $P'' \equiv (x, y, z)$, si ha

$$\left(\frac{7}{26}, -\frac{1}{13}, -\frac{5}{26}\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right),$$

da cui si ottiene

$$P'' \equiv \left(\frac{20}{13}, -\frac{28}{13}, -\frac{44}{13}\right).$$