Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo appello – 17 Febbraio 2014**

Cognome: ____________________________ **Compito A**

Nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 11 punti	**Totale**

1. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione
$$\left(\frac{z}{\bar z}\right)^2 - \left(\frac{\bar z}{z}\right)^2 = 0$$
e rappresentarle sul piano di Gauss.

2. (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) + (\operatorname{tg} x)\, y(x) = \cos^2 x$$
dove i coefficienti $\operatorname{tg} x$ e $\cos^2 x$ sono definiti sull'intervallo $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Trovare la soluzione φ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) + (\operatorname{tg} x)\, y(x) = \cos^2 x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$
specificando l'intervallo massimale sul quale tale soluzione può essere estesa. Trovata la soluzione φ, si controlli, con una verifica diretta, che essa soddisfi entrambe le condizioni (1). Disegnare il grafico qualitativo della funzione φ in un intorno di $x_0 = 0$.

3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, sia r la retta passante per i punti $A \equiv (1,0,1)$ e $B \equiv (-1,2,-1)$ e sia s la retta di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -1 - u \\ z = 2 + u \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}.$$
   (a) Trovare un vettore direttore per la retta r e un vettore direttore per la retta s. Stabilire se r ed s sono parallele, incidenti o sghembe.

   (b) Trovare un'equazione cartesiana del piano π contenente il punto $P \equiv (0,1,0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{a} = (1,0,0)$ e $\mathbf{b} = (3,-2,2)$. Stabilire se tale piano π contiene la retta r.

   (c) Trovare la distanza tra le rette r ed s.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$, e sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (1+t)\,\mathrm{e}^{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Stabilire se la funzione integrale F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

   (b) Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo locale di F.

   (c) Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{f(x) - 2}.$$
   (d) Scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione F nel punto $x_0 = 1$, troncato al terzo ordine, con resto secondo Peano.

Tutte le risposte devono essere motivate. *I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

Soluzioni

1. **Primo modo.** Utilizzando la forma trigonometrica di un numero complesso, si ha

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$
$$\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta))$$

e quindi

$$\frac{z}{\bar{z}} = \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta \qquad \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta$$
$$\frac{\bar{z}}{z} = \cos(-2\theta) + \mathrm{i}\sin(-2\theta) \qquad \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \cos(-4\theta) + i\sin(-4\theta)\,.$$

Poiché due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno uguale modulo e argomenti che differiscono per multipli di 2π, deve essere: $4\theta = -4\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), da cui si ha $\theta = k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Poiché l'equazione perde di significato se $z = 0$, le soluzioni dell'equazione sono rappresentate geometricamente dai punti degli assi cartesiani e delle bisettrici, origine esclusa.

Secondo modo. Utilizzando la forma esponenziale di un numero complesso, si ha

$$z = \rho\,\mathbf{e}^{\theta\,\mathrm{i}} \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = \rho\,\mathbf{e}^{-\theta\,\mathrm{i}}\,.$$

Poiché l'equazione di partenza ha senso solo per $z \neq 0$, deve essere. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\rho\,\mathbf{e}^{\theta\,\mathrm{i}}}{\rho\,\mathbf{e}^{-\theta\,\mathrm{i}}}\right)^2 = \left(\frac{\rho\,\mathbf{e}^{-\theta\,\mathrm{i}}}{\rho\,\mathbf{e}^{\theta\,\mathrm{i}}}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\mathbf{e}^{2\theta\,\mathrm{i}}\right)^2 = \left(\mathbf{e}^{-2\theta\,\mathrm{i}}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{e}^{4\theta\,\mathrm{i}} = \mathbf{e}^{-4\theta\,\mathrm{i}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{e}^{8\theta\,\mathrm{i}} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \cos 8\theta + \mathrm{i}\ \sin 8\theta = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \cos 8\theta = 1 \quad \text{e} \quad \sin 8\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8\theta = 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \theta = k\frac{\pi}{4}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Si ritrova così che le soluzioni dell'equazione sono rappresentate geometricamente dai punti degli assi cartesiani e delle bisettrici, origine esclusa.

Terzo modo. Posto $w = \frac{z}{\bar{z}}$, l'equazione di partenza diventa

$$w^2 - \frac{1}{w^2} = 0$$

ossia $w^4 = 1$, con $w \neq 0$ (ossia $z \neq 0$). Questa equazione ha soluzioni $w = \pm 1, \pm\mathrm{i}$. Pertanto, posto $z = x + \mathrm{i}\,y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $\bar{z} = x - \mathrm{i}\,y$ e quindi si hanno i seguenti casi

$$\begin{array}{lllllllll}
w = 1 & \Longleftrightarrow & z = \bar{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathrm{i}\,y = x - \mathrm{i}\,y & \Longleftrightarrow & y = 0 \\
w = -1 & \Longleftrightarrow & z = -\bar{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathrm{i}\,y = -x + \mathrm{i}\,y & \Longleftrightarrow & x = 0 \\
w = \mathrm{i} & \Longleftrightarrow & z = \mathrm{i}\,\bar{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathrm{i}\,y = \mathrm{i}x + \ y & \Longleftrightarrow & y = x \\
w = -\mathrm{i} & \Longleftrightarrow & z = -\mathrm{i}\,\bar{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathrm{i}\,y = -\mathrm{i}x - \ y & \Longleftrightarrow & y = -x\,.
\end{array}$$

Poiché $z \neq 0$, le soluzioni dell'equazione sono rappresentate geometricamente dai punti degli assi cartesiani e delle bisettrici, origine esclusa.

2. (a) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, dove $p(x) = \operatorname{tg} x$ e $q(x) = \cos^2 x$. Pertanto, la soluzione generale è

$$y(x) = \mathbf{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\,\mathbf{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right]$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Nel nostro caso, si ha

$$\int p(x)\, \mathrm{d}x = \int \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| = -\ln \cos x$$

(poiché $\cos x$ è positivo sull'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$), e

$$\int q(x)\, \mathbf{e}^{\int p(x)\, \mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \int \cos^2 x\, \mathbf{e}^{-\ln \cos x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x\,.$$

Pertanto, la soluzione generale[1] è

$$y(x) = \cos x \sin x + c \cos x$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

(b) Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ricava $c = 1$. Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$\varphi(x) = \cos x + \sin x \cos x\,.$$

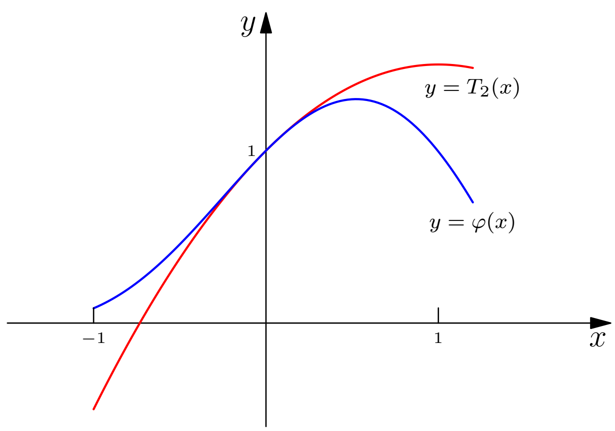
Tale soluzione è definita su tutto l'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$ su cui sono definiti i coefficienti dell'equazione[2]. Il grafico qualitativo della funzione φ vicino a $x_0 = 0$ è quello del suo polinomio di Taylor di ordine 2. Poiché

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \frac{1}{2}\,(2x + 0(x^2)) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,,$$

si ha la parabola di equazione

$$y = 1 + x - \frac{x^2}{2}\,.$$

Quindi, la funzione φ passa per il punto $(0,1)$ con pendenza 1 ed è concava (ossia volge la concavità verso il basso):



3. (a) Un vettore direttore per la retta r è $B - A = (-2, 2, -2)$, oppure $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$. Un vettore direttore per s è $\mathbf{y} = (2, -1, 1)$. Siccome questi due vettori non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi, l'intersezione $r \cap s$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = 4 + 2u \\ -t = -1 - u \\ 1 + t = 2 + u \end{cases}$$

[1] Si noti che la soluzione generale dell'equazione differenziale di partenza è la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (data dal termine $c \cos x$, al variare della costante reale c) e di una soluzione particolare dell'equazione completa (data dalla funzione $\cos x \sin x$).

[2] Questo accade sempre quando l'equazione è lineare.

che è compatibile e ha un'unica soluzione data da $t = -1$ e $s = -2$. Pertanto, le rette r ed s sono incidenti nel punto $P \equiv (0, 1, 0)$.

(b) Un vettore ortogonale al piano π è il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (0, -2, -2)$, o il vettore $(0, 1, 1)$ ad esso proporzionale. Quindi, il piano π ha equazione $(y - 1) + (z - 0) = 0$, ossia $y + z - 1 = 0$. Poiché le coordinate del generico punto $(1-t, t, 1-t)$ della retta r soddisfano l'equazione $y + z - 1 = 0$ del piano π, la retta r è contenuta nel piano π.

(c) Poiché le rette r ed s sono incidenti, la distanza[3] tra di esse è zero.

4. (a) La funzione integrale F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

ossia se converge l'integrale generalizzato

$$I = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (1+t)\,\mathbf{e}^{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poiché la funzione $f(t) = (1+t)\,\mathbf{e}^{1-t^2}$ è positiva per $t > -1$ (ossia in un opportuno intorno di $+\infty$) e poichè per $t \to +\infty$ si ha

$$f(t) \sim \frac{t}{\mathbf{e}^{t^2}} \le \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2},$$

applicando il teorema del confronto asintotico e il teorema del confronto, possiamo concludere che, essendo $1/t^2$ integrabile in senso generalizzato per $t \to +\infty$, anche la funzione f è integrabile in senso generalizzato per $t \to +\infty$. Quindi, l'integrale I converge e la funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(b) La funzione integrale F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $F'(x) \ge 0$ se e solo se $(1+x)\,\mathbf{e}^{1-x^2} \ge 0$, ossia se e solo se $x \ge -1$. Pertanto, la funzione F possiede solo un minimo locale per $x = -1$.

(c) Poichè $F(1) = 0$ e $f(1) = 2$, il limite L presenta una forma di indeterminazione $0/0$. Applicando la regola di De l'Hopital, si ha

$$L = \lim_{x\to1} \frac{F'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to1} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to1} \frac{(1+x)\,\mathbf{e}^{1-x^2}}{(1-2x-2x^2)\,\mathbf{e}^{1-x^2}} = -\frac{2}{3}.$$

(d) Si ha $F(1) = 0$ e

$$\begin{aligned}
&F'(x) = f(x) = (1+x)\,\mathbf{e}^{1-x^2} && F'(1) = 2 \\
&F''(x) = f'(x) = (1-2x-2x^2)\,\mathbf{e}^{1-x^2} && F''(1) = -3 \\
&F'''(x) = f''(x) = (-2-6x+4x^2+4x^3)\,\mathbf{e}^{1-x^2} && F'''(1) = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto, lo sviluppo di Taylor di F nel punto $x_0 = 1$, troncato al terzo ordine, con resto secondo Peano, è

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{F'''(1)}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \\
&= 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^3) \qquad \text{per } x \to 1.
\end{aligned}$$

[3] Ossia la minima distanza tra un punto $X \in r$ e un punto $Y \in s$.