Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Secondo Appello – 9 Luglio 2014**

Compito A

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Es.1: 10 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1} & \text{se } x \leq 0\,,\ x \neq -1 \\ x^3 \ln 2x & \text{se } x > 0\,, \end{cases}$$

   (a) stabilire se la funzione è continua in tutto il suo dominio;
   (b) stabilire se la funzione è derivabile in tutto il suo dominio;
   (c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e scrivere l'equazione di eventuali asintoti;
   (d) determinare gli eventuali punti di massimo, di minimo e di flesso;
   (e) disegnare il grafico della funzione.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale α converge l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\mathbf{e}^{\alpha x} - 1)\, x}{\sqrt[3]{x}\,(x^3 + x^2)^{1-\alpha}}\, \mathrm{d}x\,.$$

3. Data l'equazione differenziale

$$y' + (2\cos x)\, y - \cos x = 0\,,$$

   (a) trovare l'integrale generale;
   (b) trovare la soluzione che passa per il punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$;
   (c) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x = \frac{\pi}{4}$ della soluzione trovata al punto (b) e disegnare un grafico locale di tale soluzione in un intorno di $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Data la curva parametrica

$$\gamma : \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = t \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3} \end{cases} \qquad t \geq 0\,,$$

   (a) determinare i versori della terna intrinseca nel punto $P \equiv \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$;
   (b) scrivere le equazioni della retta tangente alla curva in P e della retta appartenente al piano osculatore normale alla curva in P;
   (c) trovare un punto A appartenente alla curva γ in modo che l'arco di curva di estremi $O \equiv (0,0,0)$ e A abbia lunghezza 4.

Soluzioni

1. (a) La funzione f è continua in ogni punto del suo dominio, ma non è continua nel suo dominio (non essendo un intervallo). Infatti, f è continua per ogni $x \in D$, $x \neq 0$ (dove è definita mediante funzioni elementari continue), ed è continua anche nel punto di raccordo $x = 0$, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \ln 2x = 0 = f(0) .$$

(b) La funzione f è derivabile in tutto il suo dominio. Infatti, per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & \text{se } x < 0 ,\ x \neq -1 \\ 3x^2 \ln 2x + x^2 & \text{se } x > 0 . \end{cases}$$

Quindi, la funzione f è derivabile per ogni $x \in D$, $x \neq 0$ ed è derivabile anche nel punto di raccordo $x = 0$, poiché

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} (3x^2 \ln 2x + x^2) = 0 . \end{aligned}$$

Inoltre, in $x = 0$, la derivata prima è nulla, ossia $f'(0) = 0$.

(c) I limiti alla frontiera del dominio sono

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^\mp} f(x) &= \lim_{x\to -1^\mp} \frac{x^2}{x+1} = \mp\infty \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} x^3 \ln 2x = +\infty . \end{aligned}$$

Pertanto, si ha un asintoto verticale di equazione $x = -1$. Inoltre, possono esserci degli asintoti obliqui. Infatti, poiché

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim_{x\to -\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 , \end{aligned}$$

la funzione ha un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ di equazione $y = x - 1$. Invece, non ammette alcun asintoto obliquo per $x \to +\infty$, poiché

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x^2 \ln 2x = +\infty .$$

(d) Studiamo il segno della derivata prima, utilizzando il risultato ottenuto nel punto (b):

i. per $x < 0$, $x \neq -1$, si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0 \iff x \leq -2$$

ii. per $x > 0$, si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2(3\ln 2x + 1) \geq 0 \iff 3\ln 2x + 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2\sqrt[3]{\mathbf{e}}} .$$

Pertanto, si ha un punto di massimo relativo in $x = -2$, dato da $M_1 \equiv (-2, -4)$, e un punto di minimo relativo in $\frac{1}{2\sqrt[3]{\mathbf{e}}}$, dato da $M_2 \equiv \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{\mathbf{e}}}, -\frac{1}{24\mathbf{e}}\right)$.
Per $x \neq 0$, si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{se } x < 0\,,\ x \neq -1 \\ 6x \ln 2x + 5x & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

i. per $x < 0$, $x \neq -1$, si ha

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{(x+1)^3} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq -1$$

e quindi la concavià è rivolta verso il basso per $x > -1$ ed è rivolta verso l'alto per $-1 < x < 0$;

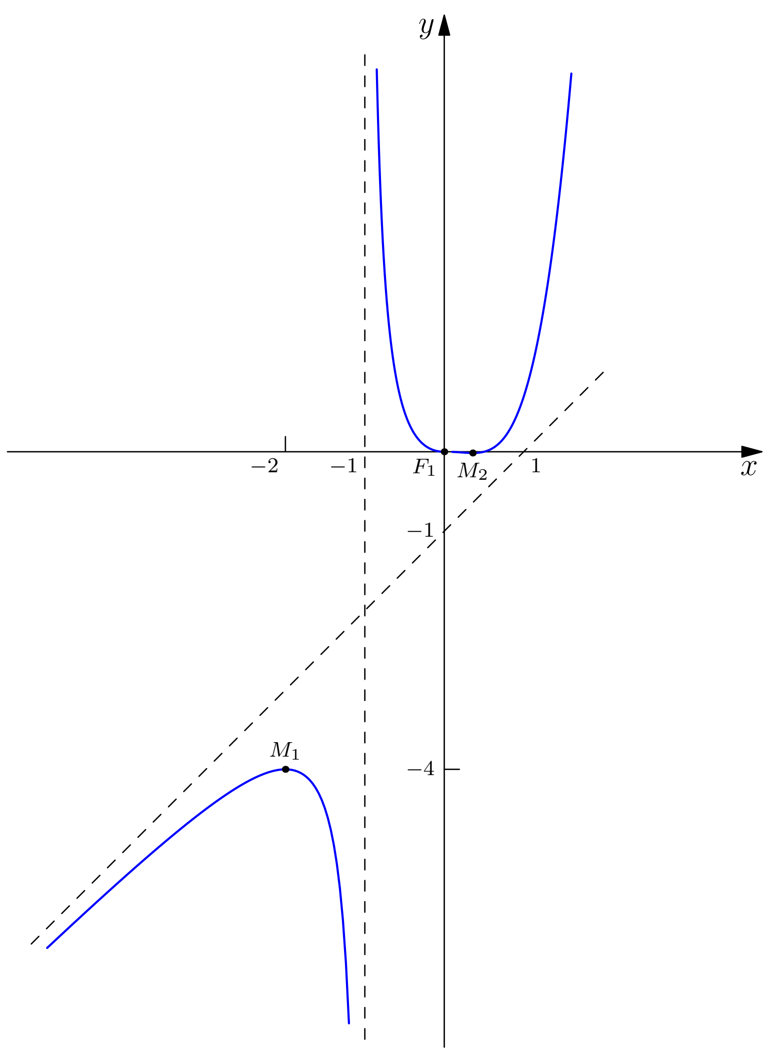
ii. per $x > 0$, si ha

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(6 \ln 2x + 5) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-5/6}$$

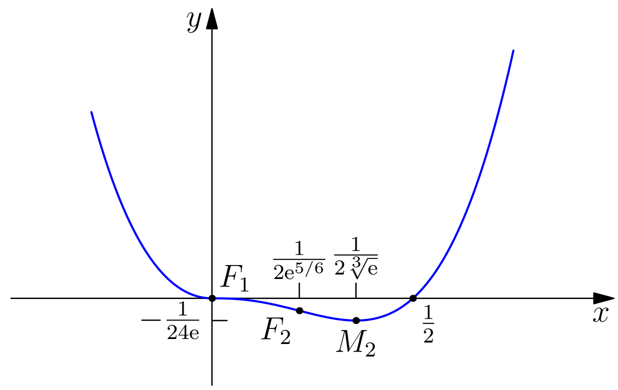
e quindi la concavià è rivolta verso il basso per $0 < x < \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-5/6}$ ed è rivolta verso l'alto per $x > \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-5/6}$.

Pertanto, si ha un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 0$, dato da $F_1 \equiv (0, 0)$, e si ha un secondo punto di flesso in $x = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-5/6}$, dato da $F_2 \equiv (\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-5/6}, -\frac{8}{48}\,\mathbf{e}^{-5/2})$.

(e) Il grafico della funzione è



In particolare, in un intorno dell'origine, il grafico è



2. La funzione integranda è

$$f(x) = \frac{(\mathbf{e}^{\alpha x} - 1)\,x}{\sqrt[3]{x}\,(x^3 + x^2)^{1-\alpha}} = \frac{(\mathbf{e}^{\alpha x} - 1)\,x}{x^{1/3}\,x^{2-2\alpha}\,(x+1)^{1-\alpha}} = \frac{\mathbf{e}^{\alpha x} - 1}{x^{4/3-2\alpha}\,(x+1)^{1-\alpha}}\,.$$

Se $\alpha = 0$, allora la funzione integranda è identicamente nulla e quindi è integrabile. Se $\alpha \neq 0$, si ha quanto segue.

(a) Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{\alpha x}{x^{4/3-2\alpha}} = \frac{\alpha}{x^{\frac{1}{3}-2\alpha}}\,.$$

Quindi f è integrabile in un intorno dell'origine se $\frac{1}{3} - 2\alpha < 1$, ossia se $\alpha > -\frac{1}{3}$.

(b) Per $x \to +\infty$, si ha:

i. se $\alpha > 0$, allora f è un infinito e quindi non è integrabile;

ii. se $\alpha < 0$, allora f è un infinitesimo di ordine superiore al secondo e quindi è integrabile.

In conclusione, l'integrale converge se $-\frac{1}{3} < \alpha \leq 0$.

3. (a) L'equazione data è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Pertanto, l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathbf{e}^{-\int 2\cos x\,\mathrm{d}x}\left(\int \cos x\,\mathbf{e}^{\int 2\cos x}\,\mathrm{d}x + c\right) \\ &= \mathbf{e}^{-2\sin x}\left(\int \cos x\,\mathbf{e}^{2\sin x}\,\mathrm{d}x + c\right) \\ &= \mathbf{e}^{-2\sin x}\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{2\sin x} + c\right) \end{aligned}$$

ossia

$$y(x) = \frac{1}{2} + c\,\mathbf{e}^{-2\sin x}$$

dove c è una costante reale arbitraria.

(b) Per $x = \pi/4$ e $y = 1$, si ha $1 = \frac{1}{2} + c\,\mathbf{e}^{-\sqrt{2}}$, da cui si ricava $c = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\sqrt{2}}$. Pertanto, la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\sqrt{2}-2\sin x}\,.$$

(c) Utilizzando l'equazione differenziale data si ha

$$\begin{aligned} &y'(x) = -(2\cos x)\,y(x) + \cos x \\ &y''(x) = (2\sin x)\,y(x) - (2\cos x)\,y'(x) - \sin x\,. \end{aligned}$$

Quindi, si ha

$$
\begin{aligned}
y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\
y'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\left(2\cos\frac{\pi}{4}\right) y\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
y''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(2\sin\frac{\pi}{4}\right) y\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(2\cos\frac{\pi}{4}\right) y'\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione, il polinomio di Taylor richiesto è

$$
\begin{aligned}
T(x) &= y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\,y''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

4. (a) Il punto P appartiene alla curva γ per $t = 1$. Si ha

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \left(\frac{t^2}{2}, t, \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3}\right) & f(1) &= \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \equiv P \\
f'(t) &= (t, 1, \sqrt{2t}) & f'(1) &= (1, 1, \sqrt{2}) \\
f''(t) &= \left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2t}}\right) & f''(1) &= \left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Inoltre, si ha $||f'(t)|| = \sqrt{t^2 + 1 + 2t} = \sqrt{(t+1)^2} = |t+1| = t+1$, essendo $t \geq 0$. Pertanto, $||f'(t)|| \neq 0$ per ogni $t \geq 0$, ossia γ è regolare. Allora si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(1) &= \frac{f'(1)}{||f'(1)||} = \frac{1}{2}\,(1, 1, \sqrt{2}) \\
\mathbf{b}(1) &= \frac{f'(1) \wedge f''(1)}{||f'(1) \wedge f''(1)||} = \frac{1}{2}\,(1, 1, -\sqrt{2}) \\
\mathbf{n}(1) &= \mathbf{b}(1) \wedge \mathbf{t}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, -1, 0)\,.
\end{aligned}
$$

(b) Le equazioni parametriche della retta tangente e della retta normale sono rispettivamente

$$
r_t : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 1 + t \\ z = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\,t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_n : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 1 - t \\ z = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,. \end{cases}
$$

(c) Sia A il punto di γ corrispondente a $t = a$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Allora, la lunghezza dell'arco di estremi O e A è

$$
L = \int_0^a ||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^a (t+1)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^a = \frac{1}{2}\,a^2 + a\,.
$$

Pertanto, si ha

$$
L = 4 \iff \frac{1}{2}\,a^2 + a = 4 \iff a^2 + 2a - 8 = 0 \iff a = 2,\ a = -4\,.
$$

Poiché $a \geq 0$, il valore cercato di a è $a = 2$ a cui corrisponde il punto $A \equiv \left(2, 2, \frac{8}{3}\right)$.