POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE

ANALISI E GEOMETRIA 1 **Terzo Appello – 8 Settembre 2014**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es.1: 9 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. Sia F la funzione integrale definita ponendo

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{|1+t|}} \, \mathrm{d}t \, .$$

   (a) Determinare il dominio di F.

   (b) Stabilire se i limiti di F per $x \to \pm\infty$ sono finiti o infiniti, indicandone il segno.

   (c) Scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione F e disegnare il grafico di F nell'intorno del punto $x = 0$.

   (d) Determinare la natura del punto $x = -1$, e disegnare il grafico di F nell'intorno del punto indicato.

2. Data l'equazione differenziale

$$y' - \frac{y^2}{x(x^2+1)} = 0$$

   (a) calcolare l'integrale generale;

   (b) calcolare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(-1) = 1$;

   (c) dopo aver verificato che esiste ed è unica, determinare la soluzione che soddisfa la condizione $y(2) = 0$.

3. Sia S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z + 1 = 0$ e sia π il piano di equazione $2x + 2y - z - 1 = 0$.

   (a) Determinare il centro e il raggio della circonferenza $\Gamma = S \cap \pi$.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente a S nel punto $P \equiv (1, 2, 0)$.

4. Sia γ la curva piana parametrizzata dalla funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(t) = (t\cos t - \sin t, \, \cos t + t\sin t) \, .$$

   (a) Calcolare la lunghezza di γ.

   (b) Verificare che, per ogni valore non nullo del parametro t, la curvatura di γ nel punto corrispondente è uguale a $\frac{1}{t}$.

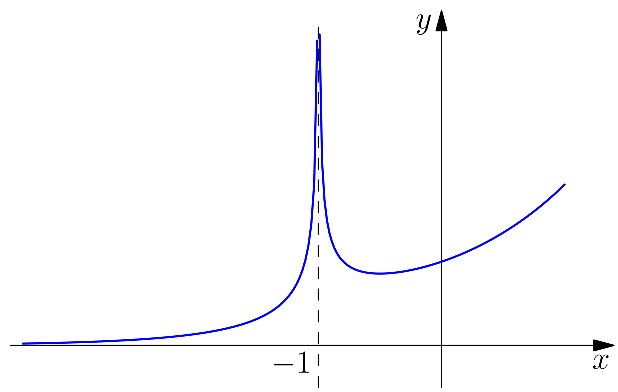
   (c) Determinare il baricentro $B \equiv (x_B, y_B)$ di γ.

Soluzioni

1. La funzione integranda

$$f(t) = \frac{\mathbf{e}^t}{\sqrt{|1+t|}}$$

è continua e positiva sull'insieme dei reali diversi da -1. Inoltre, si vede facilmente che il suo grafico è



(a) Per determinare il dominio della funzione integrale F dobbiamo studiare l'integrabilità della funzione integranda f su $\mathbb{R}$. In particolare, dobbiamo studiare l'integrabilità di f in un intorno di -1, dove f non è definita. In tutti gli altri punti f è continua e quindi integrabile.
Poiché per $t \to -1$ si ha

$$f(t) \sim \frac{\mathbf{e}^{-1}}{|1+t|^{1/2}},$$

la funzione f è integrabile in un intorno di -1. Di conseguenza, la funzione integrale F è definita su tutto $\mathbb{R}$. In particolare, per la definizione di integrale e per il fatto che f è positiva, risulta $F(x) > 0$ per $x > 0$, $F(x) < 0$ per $x < 0$ e $F(0) = 0$.

(b) Poiché per $t \to -\infty$, si ha

$$f(t) \sim \frac{\mathbf{e}^t}{|t|^{1/2}} = \frac{1}{|t|^{1/2}\mathbf{e}^{-t}} \leq \frac{1}{t^2},$$

si ha che F è integrabile in un intorno di $-\infty$. In altri termini, il limite di $F(x)$ per $x \to -\infty$ esiste ed è finito. Tale limite, per le osservazioni fatte sul segno di F, non potendo essere nullo (perchè la funzione integranda è sempre positiva), dev'essere necessariamente negativo.
Poiché $f(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$, si ha che il limite di $F(x)$ per $x \to +\infty$ è infinito e, per le osservazioni fatte sul segno di F, dev'essere necessariamente $+\infty$.

(c) Il polinomio di MacLaurin di secondo grado di F è

$$T(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}\,x^2.$$

In un (opportuno) intorno di 0, risulta $|1+t| = 1+t$. Quindi, si ha

$$F'(x) = f(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{1+x}}$$

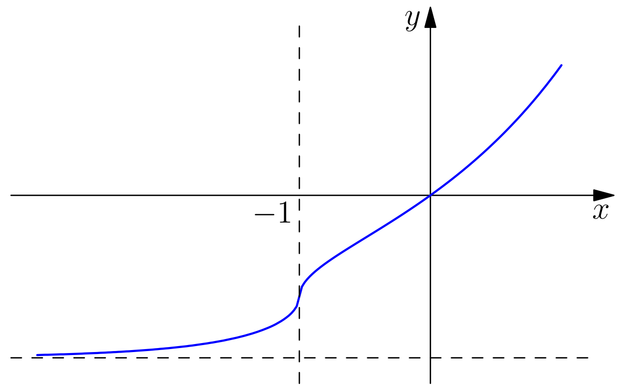
$$F''(x) = f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x\sqrt{1+x} - \frac{\mathbf{e}^x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{(1+2x)\mathbf{e}^x}{2(1+x)^{3/2}}.$$

Di conseguenza, si ha $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, $F''(0) = \frac{1}{2}$, e

$$T(x) = x + \frac{x^2}{4}.$$

Il grafico di F nell'intorno di $x = 0$ sarà approssimato dal grafico del polinomio trovato.

(d) Poiché $f(t) \to +\infty$ per $t \to -1$, si ha che $F'(x) \to +\infty$ per $x \to -1$. Poiché F è continua anche nel punto $x = -1$ (per la definizione di integrale generalizzato), si ha che in $x = -1$ il grafico di F presenta un flesso a tangente verticale (con la concavità che cambia dall'alto al basso al crescere di x):



2. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili, cioé del tipo $y' = a(x)b(y)$. Nel nostro caso, si ha $a(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ e $b(y) = y^2$. Poiché $a(x)$ non è definita per $x = 0$, le soluzioni vanno considerate nell'intervallo $(0, +\infty)$ oppure nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

(a) Si ha $b(y) = 0$ se e solo se $y = 0$. Quindi la soluzione $y(x) = 0$ è l'unica soluzione stazionaria. Le altre soluzioni si ottengono separando le variabili e integrando, ossia dall'equazione

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\,.$$

L'integrale di sinistra è immediato, mentre quello di destra si può calcolare nel modo seguente:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\,\ln|x^2+1| + c = \ln|x| - \ln\sqrt{x^2+1} + c = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c\,.$$

Pertanto, l'equazione precedente si riduce a

$$-\frac{1}{y} = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c\,,$$

ossia

$$y(x) = -\frac{1}{\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c}\,.$$

(b) Imponendo la condizione $y(-1) = 1$ nell'integrale generale, si ottiene $c = \ln\sqrt{2} - 1$. Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{1}{\ln\dfrac{|x|}{x^2+1} + \ln\sqrt{2} - 1} = -\frac{1}{\ln\dfrac{\sqrt{2}\,|x|}{x^2+1} - 1} = -\left(\ln\frac{\sqrt{2}\,|x|}{\mathbf{e}\,(x^2+1)}\right)^{-1}\,.$$

(c) La soluzione cercata esiste ed è unica poiché in un intorno di $x_0 = 2$ la funzione $a(x)$ è continua e in un intorno di $y_0 = 0$ la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Tale soluzione non è compresa fra quelle dell'integrale generale, ma è la soluzione stazionaria $y(x) = 0$, che ovviamente soddisfa la condizione.

3. (a) Utilizzando il metodo del completamento a un quadrato, l'equazione della sfera S può essere riscritta nella forma

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9\,.$$

Quindi, la sfera S ha centro $C \equiv (3,0,1)$ e raggio $R = 3$.
La distanza del centro C della sfera dal piano π è

$$h = \frac{|2\cdot 3 + 2\cdot 0 - 1 - 1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{4}{3}\,.$$

Poiché $h < R$, il piano π è effettivamente secante la sfera S, ossia Γ è una circonferenza reale non degenere. Inoltre, il raggio di Γ è

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{9 - \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{65}}{3}\,.$$

Infine, il centro di Γ è la proiezione ortogonale di C su π, ossia è l'intersezione del piano π e della retta n ortogonale a π che passa per C. Si ha

$$n : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - t\,. \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate del generico punto di n nell'equazione dei π, si ottiene $t = -\frac{4}{9}$, da cui si ottiene il centro della circonferenza

$$C' \equiv \left(\frac{19}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{13}{9}\right).$$

(b) Il piano cercato è il piano τ che passa per il punto P ed è ortogonale al vettore $C - P = (2,-2,1)$. Quindi

$$\tau : 2(x-1) - 2(y-2) + (z-0) = 0\,,$$

ossia

$$\tau : 2x - 2y + z + 2 = 0\,.$$

4. (a) Si ha

$$f'(t) = (-t\sin t\,,\ t\cos t)$$

e

$$||f'(t)|| = \sqrt{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \quad (\text{poiché } t \in [0,\pi]).$$

Quindi la lunghezza di γ è

$$L = \int_0^{\pi} ||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

(b) Posto

$$\varphi(t) = (t\cos t - \sin t,\ \cos t + t\sin t, 0),$$

si ha

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (-t\sin t\,,\ t\cos t, 0) \\ \varphi''(t) &= (-\sin t - t\cos t\,,\ \cos t - t\sin t, 0)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -t\sin t & t\cos t & 0 \\ -\sin t - t\cos t & \cos t - t\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0,0,t^2)$$

e quindi, per $t \neq 0$, la curvatura è

$$\kappa(t) = \frac{||\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)||}{||\varphi'(t)||^3} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t}\,.$$

Osservazione. In questo caso, si può procedere anche nel modo seguente (più semplice). Per $t \neq 0$, il versore tangente è

$$\mathbf{t}(t) = \frac{f'(t)}{||f'(t)||} = (-\sin t\,,\, \cos t)\,.$$

Quindi, si ha

$$\mathbf{t}'(t) = (-\cos t\,,\, -\sin t)$$

e $||\mathbf{t}'(t)|| = 1$. Di conseguenza, si ha

$$\kappa(t) = \frac{||\mathbf{t}'(t)||}{||f'(t)||} = \frac{1}{t}\,.$$

(c) Le coordinate del baricentro di γ sono

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{L}\int_\gamma x \,\mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^\pi x(t)\,||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi (t^2\cos t - t\sin t)\,\mathrm{d}t \\ y_B &= \frac{1}{L}\int_\gamma y \,\mathrm{d}s = \frac{1}{L}\int_0^\pi y(t)\,||f'(t)||\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi (t\cos t + t^2\sin t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} &\int t\cos t\,\mathrm{d}t = t\sin t - \int \sin t\,\mathrm{d}t = t\sin t + \cos t + c \\ &\int t\sin t\,\mathrm{d}t = -t\cos t + \int \cos t\,\mathrm{d}t = -t\cos t + \sin t + c \\ &\int t^2\cos t\,\mathrm{d}t = t^2\sin t - 2\int t\sin t\,\mathrm{d}t = t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + c \\ &\int t^2\sin t\,\mathrm{d}t = -t^2\cos t + 2\int t\cos t\,\mathrm{d}t = -t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t + c\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (t^2\cos t - t\sin t)\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + t\cos t - \sin t\Big]_0^\pi = -3\pi \\ &\int_0^\pi (t\cos t + t^2\sin t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\sin t + \cos t - t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t\Big]_0^\pi = \pi^2 - 6 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_B &= -\frac{6}{\pi} \\ y_B &= 2 - \frac{12}{\pi^2}\,. \end{aligned}$$