Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Primo compito in itinere – 24 Novembre 2014**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es.1: 10 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 12 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{1 + \mathrm{i}z}{\mathrm{i}z + \mathrm{i}}\,.$$

   (a) Scrivere in forma algebrica le controimmagini di $w = 3 + \mathrm{i}$ (ossia i numeri $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = w$).

   (b) Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica i punti fissi di f (ossia i numeri $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z) = z$).

2. Siano f e g le funzioni definite da

$$f(x) = \frac{(x + \sqrt[3]{x})\,\mathbf{e}^{2x}}{x(\mathbf{e}^{x} - 1)\ln x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{x(x + \ln x)\,\mathbf{e}^{3x}}{x^2 + \sqrt{x}\,\mathbf{e}^{2x}} \qquad \text{per } x \in (1, +\infty)\,.$$

   (a) Calcolare i limiti

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad L_2 = \lim_{x \to +\infty} g(x)\,.$$

   (b) Stabilire se $g(x) = o(f(x))$ per $x \to +\infty$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \ln(x-1)^2 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è derivabile in $x_0 = 1$.

   (b) Trovare i punti di massimo locale e di minimo locale di f.

   (c) Disegnare il grafico di f.

Tempo: 1 ora e 30 minuti.

Istruzioni: Non si possono consultare libri o appunti. Non si possono usare calcolatrici. Tutte le risposte devono essere motivate. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

Soluzioni

1. (a) Le controimmagini di $3+\mathrm{i}$ sono i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 3+\mathrm{i}$, cioé

$$\frac{1+\mathrm{i}z}{\mathrm{i}z+\mathrm{i}} = 3+\mathrm{i} \iff 1+\mathrm{i}z = 3\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - z - 1 \iff z = \frac{-2+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \iff z = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}\,i\,.$$

(b) I punti fissi di f sono le soluzioni dell'equazione

$$f(z) = z \iff \frac{1+\mathrm{i}z}{\mathrm{i}z+\mathrm{i}} = z \iff 1+\mathrm{i}z = \mathrm{i}z^2+\mathrm{i}z \iff 1 = \mathrm{i}z^2 \iff z^2 = -\mathrm{i} \iff z = \sqrt{-i}\,.$$

Le radici quadrate di $-\mathrm{i} = \cos(\frac{3}{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{2}\pi)$ sono

$$z_{1,2} = \pm\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right) = \mp\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,.$$

2. (a) Per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{(x+\sqrt[3]{x})\,\mathbf{e}^{2x}}{x(\mathbf{e}^x-1)\ln x} \sim \frac{x\,\mathbf{e}^{2x}}{x\mathbf{e}^x\ln x} = \frac{\mathbf{e}^x}{\ln x}$$

e quindi

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{e}^x}{\ln x} = +\infty\,.$$

Analogamente, per $x \to +\infty$, si ha

$$g(x) = \frac{x(x+\ln x)\,\mathbf{e}^{3x}}{x^2+\sqrt{x}\,\mathbf{e}^{2x}} \sim \frac{x\,x\,\mathbf{e}^{3x}}{\sqrt{x}\,\mathbf{e}^{2x}} = x\sqrt{x}\,\mathbf{e}^x\,.$$

e quindi

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\,\mathbf{e}^x = +\infty\,.$$

(b) Si ha $g(x) = o(f(x))$ per $x \to +\infty$ se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0\,.$$

Poiché, per $x \to +\infty$ si hanno le equivalenze asintotiche

$$f(x) \sim \frac{\mathbf{e}^x}{\ln x} \qquad \text{e} \qquad g(x) \sim x\sqrt{x}\,\mathbf{e}^x\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\,\mathbf{e}^x\,\frac{\ln x}{\mathbf{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\ln x = +\infty\,.$$

Quindi, $g(x) \neq o(f(x))$ per $x \to +\infty$.

3. Si ha $f(x) = g(x-1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2\ln x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Poiché le due funzioni f e g differiscono solo per una traslazione (lungo l'asse x), possiamo studiare la funzione g al posto della funzione f e ricavare poi le informazioni richieste su f. Il vantaggio di studiare g risiede nel fatto che g è una funzione pari.

(a) La derivabilità di f in $x_0 = 1$ equivale alla derivabilità di g in $x_0' = 0$. Poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0} 2x\ln|x| = 0\,,$$

la funzione g è derivabile in $x_0' = 0$ e $g'(0) = 0$. Quindi la funzione f è derivabile in $x_0 = 1$ e $f'(1) = g'(0) = 0$.

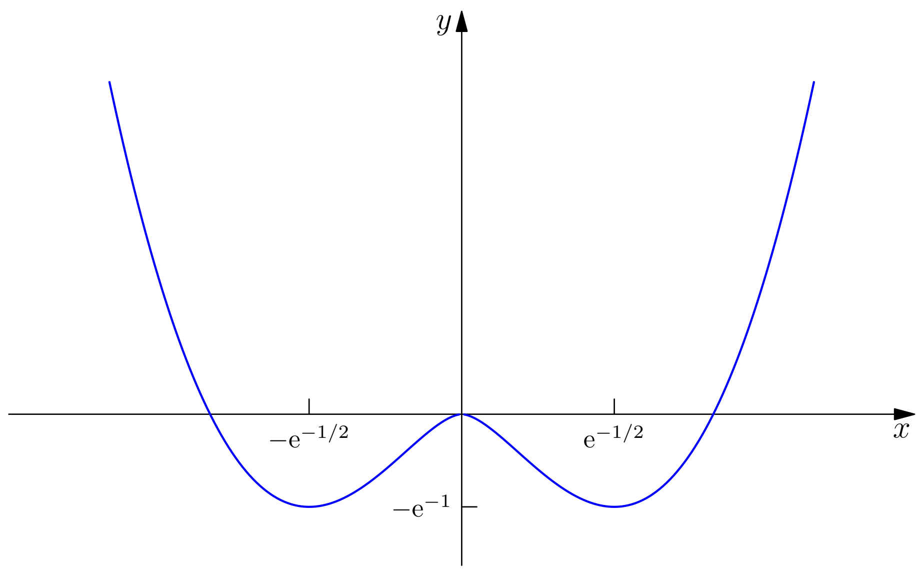
(b) Poiché g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, i punti di massimo locale e di minimo locale di g vanno ricercati fra i punti in cui la derivata prima g' si annulla. Sappiamo già che $g'(0) = 0$. Studiando direttamente il segno di g vicino a $x'_0 = 0$, si vede che in $x'_0 = 0$ vi è un punto di massimo locale per g. Più precisamente, il punto di massimo locale è $M' \equiv (0,0)$.

In $(0,+\infty)$ la derivata $g'(x) = 2x(1+2\ln x)$ si annulla solo in $x'_1 = \mathbf{e}^{-1/2}$, dove si ha un punto di minimo locale per g. Per simmetria, anche in $x'_2 = -\mathbf{e}^{-1/2}$ vi è un punto di minimo locale per g. Pertanto, i punti di minimo locale sono $m'_1 \equiv (\mathbf{e}^{-1/2}, -\mathbf{e}^{-1})$ e $m'_2 \equiv (-\mathbf{e}^{-1/2}, -\mathbf{e}^{-1})$.

Ne segue che in $x_0 = x'_0 + 1 = 1$ vi è l'unico punto di massimo locale di f, dato da $M \equiv (1,0)$, mentre in $x_1 = x'_1 + 1 = \mathbf{e}^{-1/2} + 1$ e in $x_2 = x'_2 + 1 = -\mathbf{e}^{-1/2} + 1$ vi sono i due punti di minimo locale di f, dati da $m_1 \equiv (\mathbf{e}^{-1/2} + 1, -\mathbf{e}^{-1})$ e $m_2 \equiv (-\mathbf{e}^{-1/2} + 1, -\mathbf{e}^{-1})$.

(c) Il grafico di f si ottiene da quello di g mediante una traslazione. Poiché g è una funzione pari, il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = 1$.

Usando le informazioni ottenute nei punti precedenti ed osservando che $g(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, si ottiene il grafico della funzione g:



Traslando tale grafico di 1 lungo l'asse x, si ottiene il grafico della funzione f: