ANALISI E GEOMETRIA 1 **Secondo compito in itinere – 2 Febbraio 2015**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

Es.1: 12 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 12 punti	**Totale**

1. (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) + xy(x) = x\,.$$
(b) Determinare la soluzione $\overline{y}$ che assume valore massimo uguale a 2.
(c) Verificare che la funzione integrale F definita da
$$F(x) = \int_0^x \overline{y}(t)\;\mathrm{d}t$$
ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

2. Nello spazio riferito a un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, sia r la retta rappresentata dalle equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$
e sia s la retta che si ottiene intersecando i due piani $\pi_1 \;:\; x - z = 1$ e $\pi_2 \;:\; x + y - 2z - 3 = 0$.
(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s.
(b) Determinare l'intersezione delle rette r ed s.
(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene r ed s.

3. Sia γ la curva di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t)$ per ogni $t \in [-1,1]$.
(a) Determinare la retta tangente r a γ nel punto $P \equiv (1,0,1)$.
(b) Determinare il raggio e il centro della circonferenza osculatrice di γ nel punto P.
(c) Determinare la lunghezza L di γ.
(d) Determinare il momento di inerzia I_z di γ rispetto all'asse z, quando γ è dotata di densità lineare di massa $\delta : \gamma \to [0, +\infty)$, definita da $\delta(x,y,z) = \frac{1}{|z|}$ per ogni $(x,y,z) \in \gamma$.

Istruzioni: Non si possono consultare libri o appunti. Non si possono usare calcolatrici. Tutte le risposte devono essere motivate. I fogli di brutta non devono essere consegnati.
Tempo: 1 ora e 30 minuti.

Soluzioni

1. (a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine[1], scritta nella forma $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, dove $p(x) = x$ e $q(x) = x$. Pertanto, l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + c\right] \\ &= e^{-\int x\,dx}\left[\int x\,e^{\int x\,dx}\,dx + c\right] \\ &= e^{-x^2/2}\left[\int x\,e^{x^2/2}\,dx + c\right] \\ &= e^{-x^2/2}\left(e^{x^2/2} + c\right) \\ &= 1 + c\,e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

dove c è un'arbitraria costante di integrazione.

(b) Se si osserva che l'immagine della funzione data da $e^{-x^2/2}$ è l'intervallo $(0, 1]$, allora la soluzione che assume valore massimo uguale a 2 è quella che si ottiene per $c = 1$, ossia

$$\overline{y}(x) = 1 + e^{-x^2/2}\,.$$

(c) La funzione F presenta un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, avente equazione $y = mx + q$, se e solo se

i. il limite $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ esiste finito ed è diverso da zero, e

ii. il limite $q = \lim\limits_{x\to+\infty} (F(x) - mx)$ esiste finito.

Nel nostro caso, poiché $f(t) \to 1$ per $t \to +\infty$, si ha che $F(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Nel calcolo del limite di $\frac{F(x)}{x}$ per $x \to +\infty$ si presenta quindi la forma di inderminazione $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Poiché le funzioni al numeratore e al denominatore sono derivabili, è possibile applicare il teorema di De l'Hôpital, ottenendo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + e^{-x^2/2}\right) = 1\,.$$

Quindi, si ha

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to+\infty} (F(x) - mx) \\ &= \lim_{x\to+\infty} (F(x) - x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x \left(1 + e^{-t^2/2}\right)\,dt - x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt - x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt\,. \end{aligned}$$

Poiché $e^{-t^2/2}$ è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$, q esiste finito. Di conseguenza, la funzione F possiede un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. In particolare, tale asintoto ha equazione[2]

$$y = x + \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt\,.$$

[1] In realtà, si tratta anche di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

[2] Si può dimostrare che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Quindi l'equazione dell'asintoto risulta $y = x + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. (a) Ponendo $z = t$ e risolvendo rispetto a x e y, si ottengono le seguenti equazioni parametriche della retta s:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = t\,. \end{cases}$$

(b) Intersechiamo r con s sostituendo le coordinate del generico punto di r nelle equazioni cartesiane di s. In questo modo, si ha il sistema

$$\begin{cases} 2 - 3t + 1 - t = 1 \\ 2 - 3t + 1 + t + 2 - 2t - 3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene un unico valore del parametro, ossia $t = \frac{1}{2}$. Pertanto, le due rette sono incidenti in un punto, dato da $P \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(c) Sia π il piano che contiene le rette r ed s. Poiché i vettori $\mathbf{a} = (-3, 1, 1)$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ dànno le direzioni rispettivamente di r e di s, il vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (0, 4, -4)$ individua la direzione ortogonale a π. Quindi, poiché $P \in \pi$, l'equazione cartesiana di π è

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right) - 4\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0\,,$$

ossia $\pi \ : \ y - z - 2 = 0$.

Equivalentemente, si può scrivere l'equazione del fascio di piani che ha s come sostegno ed imporre il passaggio per il punto $A \equiv (2, 1, -1) \in r$.

3. (a) Si ha $P \in \gamma$ sse $P = f(t)$ sse $t = 0$. Quindi $P = f(0)$. Inoltre, si ha $f'(t) = (\mathrm{e}^t \cos t - \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t)$ e $f'(0) = (1, 1, 1)$. L'equazione vettoriale della retta r è $\mathbf{x} = f(0) + t f'(0)$. Quindi le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = x(0) + x'(0)t = 1 + t \\ y = y(0) + y'(0)t = t \\ z = z(0) + z'(0)t = 1 + t\,. \end{cases}$$

(b) Si ha $f''(t) = \mathrm{e}^t(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$ e $f''(0) = (0, 2, 1)$. Pertanto, si ha

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)$$

e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = \sqrt{6}$. Infine, essendo $\|f'(0)\| = \sqrt{3}$, i versori della terna intrinseca in P sono

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1, 1, 1) \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1, -1, 2) \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1, 1, 0)\,, \end{aligned}$$

mentre la curvatura e il raggio di curvatura in P sono

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{e} \qquad \rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Pertanto, il raggio della circonferenza osculatrice è $\rho(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$, mentre il centro è

$$C(0) = f(0) - \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (1, 0, 1) + \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right).$$

(c) Poiché si ha

$$\|f'(t)\| = \mathrm{e}^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1} = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^t\,,$$

la lunghezza della curva γ è

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}) = 2\sqrt{3}\,\sinh 1\,.$$

(d) Poiché $\delta(f(t)) = \mathrm{e}^{-t}$, si ha

$$I_z = \int_\gamma (x^2 + y^2)\,\delta\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} (x(t)^2 + y(t)^2)\,\delta(f(t))\,\|f'(t)\|\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\sqrt{3}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}) = \sqrt{3}\,\sinh 2\,.$$