Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo Appello – 16 Febbraio 2015**

Cognome: ______________________________ **Compito A**

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. (a) Parametrizzare la curva $\Gamma = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2\,,\ 3z = 2xy \,\}$.
   (b) Determinare la lunghezza L dell'arco $\gamma \subset \Gamma$ i cui estremi sono i punti di intersezione di Γ con i piani $\pi_0 \ : \ z = 0$ e $\pi_1 \ : \ z = 2/3$.
   (c) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $F(x,y,z) = x^2 + y$. Calcolare l'integrale
$$I = \int_\gamma F \, \mathrm{d}s\,.$$

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - \cos x^2}{x^2 \sin x - x \ln(1+x^2)}\,.$$

3. Studiare la funzione $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt[3]{t}\,(1+t)}\,\mathrm{d}t\,.$$
(Segno e zeri, limiti agli estremi del dominio, asintoti, derivata prima (dominio e formula), limiti di F' agli estremi del dominio, segno di F' e max/min, derivata seconda (dominio e formula), segno di F'' e flessi, grafico.)

4. (a) Determinare le soluzioni dell'equazione $w^2 - (2+\mathrm{i})w + 1 + \mathrm{i} = 0$.
   (b) Determinare le soluzioni del seguente sistema:
$$\begin{cases} w^2 - (2+\mathrm{i})w + 1 + \mathrm{i} = 0 \\ w = z^3. \end{cases}$$
   (c) Sia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $F(z) = (-1+\sqrt{3}\mathrm{i})z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Determinare l'immagine $F(S)$ dell'insieme
$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \le \operatorname{Re} z \le \frac{1}{2} \ \text{ e } \ (\operatorname{Im} z)^2 = 3\,(\operatorname{Re} z)^2 \right\}.$$
   e rappresentarla nel piano complesso.

Istruzioni: Non si possono consultare libri o appunti. Non si possono usare calcolatrici. Tutte le risposte devono essere motivate. I fogli di brutta non devono essere consegnati.
Tempo: 2 ore.

Soluzioni

1. (a) Posto $x = t$, si ha immediatamente la parametrizzazione richiesta:

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{2}{3}\, t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, la curva Γ è parametrizzata dalla funzione vettoriale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}\, t^3)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(b) Usando le equazioni parametriche di Γ si ha immediatamente che $z = 0$ sse $t = 0$ e $z = \frac{2}{3}$ sse $t = 1$. Quindi, gli estremi di γ sono $P_0 = \pi_0 \cap \Gamma = f(0) \equiv (0,0,0)$ e $P_1 = \pi_1 \cap \Gamma = f(1) \equiv (1, 1, \frac{2}{3})$.
Poiché $f'(t) = (1, 2t, 2t^2)$ e $\|f'(t)\| = 1 + 2t^2$, si ha

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, \mathrm{d}t = \frac{5}{3}.$$

(c) Poiché $F(f(t)) = 2t^2$, si ha

$$I = \int_\gamma F\, \mathrm{d}s = \int_0^1 F(f(t))\, \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_0^1 2t^2(1 + 2t^2)\, \mathrm{d}t = \frac{22}{15}.$$

2. Per $x \to 0$, si ha

$$\sqrt{1 - x^4} - \cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^5) - \left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) = o(x^5)$$

$$x^2 \sin x - x \ln(1 + x^2) = x^2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \frac{x^5}{3} + o(x^5).$$

Quindi, si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x^4} - \cos x^2}{x^2 \sin x - x \ln(1 + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^5)}{x^5/3 + o(x^5)} = \lim_{x \to 0} \frac{o(1)}{1/3 + o(1)} = 0.$$

3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione integranda, definita da

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt[3]{t}\, (1 + t)}.$$

(a) *Segno e zeri.* In $x = 1$ la funzione F ha uno zero. Più in generale, si ha

$$\begin{array}{lll} F(x) > 0 & \text{se} & x > 1 \\ F(x) = 0 & \text{se} & x = 1 \\ F(x) < 0 & \text{se} & 0 < x < 1. \end{array}$$

(b) *Limiti agli estremi del dominio.*

i. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt[3]{t}\, (1 + t)}\, \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt[3]{t}\, (1 + t)}\, \mathrm{d}t = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Infatti, poiché $f(t) \sim \frac{1}{t^{1/3}}$ per $x \to 0^+$, si ha che f è integrabile in un intorno destro di 0. Quindi, F presenta una discontnuità eliminabile in 0. Ponendo $F(0) = \alpha$, è possibile estendere il dominio di F a $[0, +\infty)$. Inoltre $\alpha < 0$ (anche se non è calcolabile esplicitamente).

ii. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt[3]{t}\,(1+t)}\,\mathrm{d}t = \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Infatti, poiché $f(t) \sim \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{4/3}} = (t^{2/3}\mathrm{e}^{-t})\,\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ per $x \to +\infty$, si ha che f è integrabile a $+\infty$. Inoltre $\beta > 0$ (anche se non è calcolabile esplicitamente).

(c) *Asintoti.* Si ha un asintoto orizzontale destro di equazione $y = \beta$.

(d) *Derivata prima* (dominio e formula). Il dominio di F' è $(0, +\infty)$, e

$$F'(x) = f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[3]{x}\,(1+x)}\,,$$

(e) *Limiti di F' agli estremi del dominio.* Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[3]{x}\,(1+x)} = +\infty\,,$$

la funzione F ha tangente verticale in $x = 0$ (ossia in $x = 0$ presenta una cuspide (destra)).

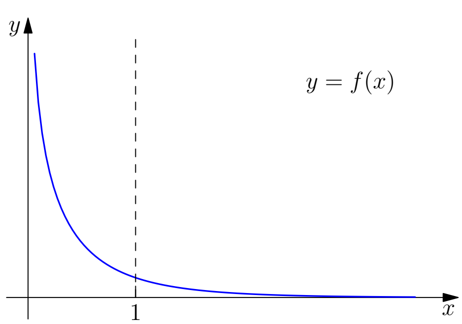
(f) *Segno di F' e max/min.* Si ha $F'(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Quindi, la funzione F è crescente su tutto il suo dominio. In particolare, la funzione F estesa all'intervallo $[0, +\infty)$ presenta un minimo assoluto per $x = 0$, nel punto $(0, F(0)) = (0, \alpha)$.

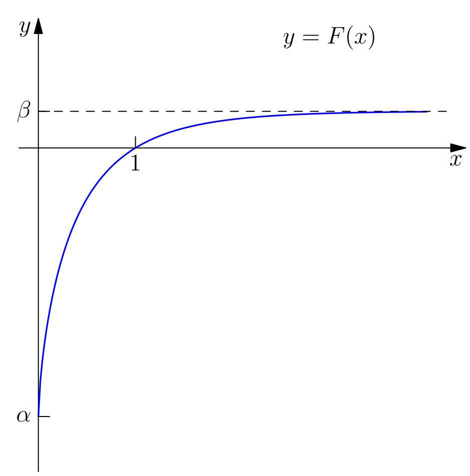
(g) *Derivata seconda* (dominio e formula). Il dominio di F'' è $(0, +\infty)$, e

$$F''(x) = -\frac{(3x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}}{3\,x^{4/3}\,(1+x)^2}\,.$$

(h) *Segno di F'' e flessi.* Poiché $F''(x) < 0$ per ogni $x > 0$, la funzione F presenta sempre concavità rivolta verso l'alto (ossia è concava sul suo dominio).

(i) *Grafico.*





4. (a) L'equazione data si può scomporre in modo elementare. Infatti, si ha

$$w^2 - 2w + 1 - \mathrm{i}w + \mathrm{i} = 0\,,$$

ossia $(w-1)^2 - \mathrm{i}(w-1) = 0$, ossia $(w-1)(w-1-\mathrm{i}) = 0$. Pertanto, le soluzioni sono

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) \\ w_2 &= 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

(b) Poiché la prima equazione del sistema è quella risolta nel punto precedente, si tratta semplicemente di trovare le radici cubiche di 1 e $1+\mathrm{i}$. Passando alla forma trigonometrica, si ha che le radici cubiche di 1 sono date da

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3} \qquad k = 0, 1, 2\,,$$

ossia da

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \cos\frac{2}{3}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\,\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} \\ z_2 &= \cos\frac{4}{3}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\,\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Analogamente, le radici cubiche di $1+\mathrm{i}$ sono date da

$$z'_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2\,,$$

ossia da

$$\begin{aligned} z'_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ z'_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{4}{3}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\,\pi\right) \\ z'_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{17}{12}\,\pi\right). \end{aligned}$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni del sistema dato è $\{z_0, z_1, z_2, z'_0, z'_1, z'_2\}$.

(c) Poiché

$$-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\,\pi\right),$$

si ha che la funzione F rappresenta geometricamente una roto-dilatazione composta da una rotazione in senso antiorario, attorno all' origine, di angolo $\frac{2}{3}\,\pi$ e da una dilatazione di modulo 2. Tale trasformazione è biunivoca. Pertanto, l'immagine dell'insieme S è l'insieme $F(S)$ che si ottiene ruotando S in senso antiorario, attorno all'origine, di un angolo $\frac{2}{3}\,\pi$ e poi dilatando di un fattore 2 l'insieme risultante.
Posto $z = x + \mathrm{i}\,y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, l'insieme S è definito dalle condizioni $0 \le x \le 1/2$ e $y^2 = 3x^2$, ossia dalle condizioni $0 \le x \le 1/2$ e $y = \pm\sqrt{3}\,x$. Di conseguenza, l'insieme S risulta essere l'unione dei segmenti che hanno per primo estremo il punto $z_0 = 0$ e per secondo estremo rispettivamente i punti

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} \\ z_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, in coordinate polari, si ha

$$S = \{0\} \cup \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 1 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 1 \text{ e } \vartheta = -\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Di conseguenza, l'insieme $F(S)$ risulta essere l'unione dei segmenti che hanno per primo estremo il punto $F(z_0) = z_0 = 0$ e per secondo estremo rispettivamente i punti

$$\begin{aligned} z'_1 &= F(z_1) = \frac{1}{2}\,(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}) = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ z'_2 &= F(z_2) = \frac{1}{2}\,(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}) = \frac{2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

ossia

$$F(S) = \{0\} \cup \{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 2 \ \text{ e } \ \vartheta = \pi\} \cup \left\{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho \le 2 \ \text{ e } \ \vartheta = \frac{\pi}{3}\right\}.$$