Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo appello – 8 Luglio 2015**

Cognome: ____________________________ **Compito A**

Nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

1. Si consideri l'equazione differenziale
$$y' = -\frac{y}{1+x^2} + \mathrm{e}^{-\operatorname{artg} x}\ln(x+1)\,.$$
   (a) Determinare l'integrale generale.
   (b) Determinare la soluzione che verifica la condizione $y(0) = 1$.

2. Sia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \cos x \sqrt[3]{\sin x}\,.$$
   (a) Stabilire in quali punti del suo dominio f è derivabile e trovare i limiti della derivata agli estremi del dominio.
   (b) Determinare le ascisse dei punti di minimo e di massimo (locali e assoluti) di f nel suo dominio.
   (c) Disegnare il grafico di f .

3. Si consideri la curva γ parametrizzata dalla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definita da
$$f(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, 2)\,.$$
   (a) Determinare i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ del riferimento di Frenet nel punto $f(t_0)$, dove $t_0 = \pi/2$.
   (b) Determinare il valore della curvatura κ per $t_0 = \pi/2$.
   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano normale alla curva γ nel punto corrispondente al valore $t_0 = \pi/2$.

4. Si consideri il solido Ω generato dalla rotazione attorno all'asse delle x del grafico della funzione $f : [\mathrm{e}, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,\ln x}\,.$$
   Calcolare il volume
$$V(\Omega) = \pi \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$
   del solido Ω o dimostrare che tale volume è infinito.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Soluzioni

1. (a) L'equazione differenziale data è lineare del primo ordine (ed è definita per $x > -1$). L'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}} \left(\int \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}} \mathrm{e}^{-\operatorname{artg} x} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= \mathrm{e}^{-\arctan x} \left(\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= \mathrm{e}^{-\arctan x} \left(x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= \mathrm{e}^{-\arctan x} \left(x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x + C \right) \\ &= \mathrm{e}^{-\arctan x} \left(x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x + C \right) \\ &= \mathrm{e}^{-\arctan x} \left(x\ln(x+1) - x + \ln(1+x) + C \right) \end{aligned}$$

ossia

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\arctan x}\big((x+1)\ln(x+1) - x + C\big)$$

dove C è un'arbitraria costante reale di integrazione.

(b) Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si trova $C = 1$. Quindi, la soluzione del problema di Cauchy dato è la funzione definita da

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\arctan x}\big((x+1)\ln(x+1) - x + 1\big).$$

2. Sia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \cos x \sqrt[3]{\sin x}$$

per ogni $x \in [0,\pi]$.

(a) La derivata prima della funzione f è data da

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \sqrt[3]{\sin x} + \frac{1}{3} \cos^2 x (\sin x)^{-2/3} \\ &= -\sin x \sqrt[3]{\sin x} + \frac{1}{3} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \frac{-3\sin^2 x + \cos^2 x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \frac{1 - 4\sin^2 x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}. \end{aligned}$$

Pertanto, f è derivabile in tutto il suo dominio, esclusi i punti $x = 0$ e $x = \pi$. Inoltre, si hanno i seguenti limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to\pi-} f'(x) = +\infty.$$

(b) Sull'intervallo $[0,\pi]$, si ha

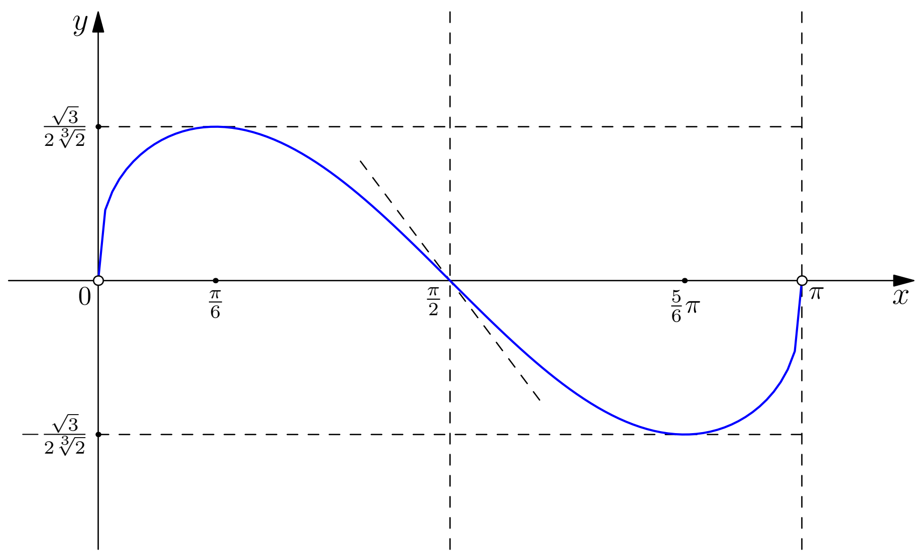
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad 1 - 4\sin^2 x = 0 \\ &\iff \quad \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ &\iff \quad \sin x = \pm\frac{1}{2} \\ &\iff \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

Analogamente, sull'intervallo $[0, \pi]$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad & \iff \quad 1 - 4\sin^2 x \geq 0 \\ & \iff \quad 4\sin^2 x - 1 \leq 0 \\ & \iff \quad -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \\ & \iff \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad \frac{5}{6}\pi \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Pertanto, $x = 0$ è punto di minimo locale, $x = \frac{\pi}{6}$ è punto di massimo assoluto, $x = \frac{5}{6}\pi$ è punto di minimo assoluto, $x = \pi$ è punto di massimo locale. In particolare, il valore massimo di f è $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ mentre il valore minimo è $-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$.

(c) Si osservi che $f(x) \geq 0$ se e solo se $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Inoltre, si ha $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{3}$. Infine, il grafico di f è



3. Si consideri la curva γ parametrizzata dalla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$f(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, 2)\,.$$

(a) Si ha Si consideri la curva γ parametrizzata dalla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$\begin{aligned} & f(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, 2) && f(t_0) = (0, \mathrm{e}^{\pi/2}, 2) \\ & f'(t) = (\mathrm{e}^t(\cos t - \sin t), \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t), 0) && f'(t_0) = (-\mathrm{e}^{\pi/2}, \mathrm{e}^{\pi/2}, 0) \\ & f''(t) = (-2\mathrm{e}^t \sin t, 2\mathrm{e}^t \cos t, 0) && f'(t_0) = (-2\mathrm{e}^{\pi/2}, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, essendo $\|f'(t)\| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}$,si ha

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{(-\mathrm{e}^{\pi/2}, \mathrm{e}^{\pi/2}, 0)}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}} = \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}\,.$$

Inoltre, si ha $f'(t_0) \wedge f''(t_0) = (0, 0, 2\mathrm{e}^{\pi})$ e $\|f'(t_0) \wedge f''(t_0)\| = 2\mathrm{e}^{\pi}$, e quindi $\mathbf{b}(t_0) = \mathbf{k}$ (infatti γ è una curva piana, appartenente al piano xy). Infine, si ha

$$\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{b}(t_0) \wedge \mathbf{t}(t_0) = \frac{(-1, -1, 0)}{\sqrt{2}}\,.$$

(b) Si ha
$$\kappa(t_0) = \frac{\|f'(t_0) \wedge f''(t_0)\|}{\|f'(t_0)\|^3} = \frac{2\,\mathrm{e}^{\pi}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\pi/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pi/2}}\,.$$

(c) Il piano normale nel punto $P_0 = f(t_0) = (0, \mathrm{e}^{\pi/2}, 2)$ è ortogonale al vettore $\mathbf{t}(t_0)$ e quindi ha equazione vettoriale
$$\langle \mathbf{t}(t_0), X - P_0 \rangle = 0\,.$$
Poiché $\mathbf{t}(t_0)$ è multiplo del vettore $(-1, 1, 0)$, un'equazione cartesiana del piano normale è
$$-1(x-0) + 1(y - \mathrm{e}^{\pi/2}) + 0(z-2) = 0\,,$$
ossia $x - y + \mathrm{e}^{\pi/2} = 0$.

4. Il volume del solido Ω è dato dall'integrale improprio
$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \pi \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \pi \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{\mathrm{e}}^{+\infty} = \pi\,. \end{aligned}$$