Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Terzo appello – 7 Settembre 2015**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 10 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. Determinare, nel campo complesso, le soluzioni dell'equazione
$$z^2 + \frac{\mathrm{i}}{z^2} = -\frac{\overline{z}^2}{2}\,.$$

2. Sia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \frac{6(\operatorname{artg} x - \sin x) + x^3}{(e^x - 1)\,\ln(1 + x^4)}\,.$$
Calcolare i seguenti limiti.
$$L_1 = \lim_{x\to 0} f(x)\,, \qquad L_2 = \lim_{x\to +\infty} f(x)\,, \qquad L_3 = \lim_{x\to -\infty} f(x)\,.$$

3. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}}\,.$$
   (a) Determinare i limiti agli estremi del dominio di f.
   (b) Determinare gli eventuali asintoti di f.
   (c) Determinare la derivata prima di f.
   (d) Determinare gli estremi locali di f.
   (e) Determinare il numero minimo di flessi compatibili di f, usando solo le informazioni ottenute nei punti precedenti (senza studiare f'').

4. Si considerino il piano $\pi\ :\ x - 2y + z - 1 = 0$ e la retta
$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = 4\,. \end{cases}$$
   (a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r' che si ottiene proiettando ortogonalmente r su π.
   (b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r'' simmetrica di r rispetto a π.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. Posto $w = z^2$, l'equazione data diventa
$$w + \frac{\mathrm{i}}{w} = -\frac{\overline{w}}{2}\,.$$
Moltiplicando per w, si ha
$$w^2 + \mathrm{i} = -\frac{w\overline{w}}{2} = -\frac{|w|^2}{2}$$
ossia
$$w^2 = -\frac{|w|^2}{2} - \mathrm{i}\,. \tag{1}$$
Pertanto, si ha
$$|w^2| = \left|-\frac{|w|^2}{2} - \mathrm{i}\right| = \sqrt{-\frac{|w|^4}{4} + 1}\,.$$
Elevando a quadrato, si ha
$$|w|^4 = -\frac{|w|^4}{4} + 1$$
da cui si ha
$$\frac{3}{4}|w|^4 = 1$$
ossia
$$|w|^4 = \frac{4}{3}$$
e quindi
$$|w|^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$
Pertanto, l'equazione (1) diventa
$$w^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \mathrm{i} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$
ossia
$$z^4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\right).$$
Pertanto, le radici dell'equazione iniziale sono
$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\cos\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\cos\frac{(2+3k)\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{(2+3k)\pi}{6}\right) \end{aligned}$$
con $k = 0, 1, 2, 3$.

2. Per $x \to 0$, si ha
$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to 0} \frac{6(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)) + x^3}{(1 + x + o(x) - 1)(x^4 + o(x^4))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3 + \frac{6}{5}x^5 + x^3 - \frac{x^5}{20} + o(x^5) + x^3}{(x + o(x))(x^4 + o(x^4))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{23}{20}x^5 + o(x^5)}{x^5(1 + o(1))(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{23}{20} + o(1)}{1 + o(1)} \\ &= \frac{23}{20}\,. \end{aligned}$$

Utilizzando la gerarchia degli infiniti, e tenendo conto che $6(\operatorname{artg} x - \sin x)$ è sempre una quantitià limitata, si ha

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathbf{e}^x \ln(1+x^4)} = 0$$
$$L_3 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-\ln(1+x^4)} = +\infty\,.$$

3. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}}\,.$$

(a) La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Pertanto, i limiti agli estremi del dominio di f sono

$$\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}} = \lim_{x\to0^\pm} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^5}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty\,.$$

(b) La funzione f ha un asintoto verticale per $x \to 0$, dato dalla retta di equazione $x = 0$. Inoltre, f possiede un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, dato dalla retta di equazione $y = x + \frac{5}{3}$. Infatti, si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^5}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5} = 1$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5/3} - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(1 + \frac{5}{3}\frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{5}{3} + o(1)\right) = \frac{5}{3}\,.$$

(c) Poiché

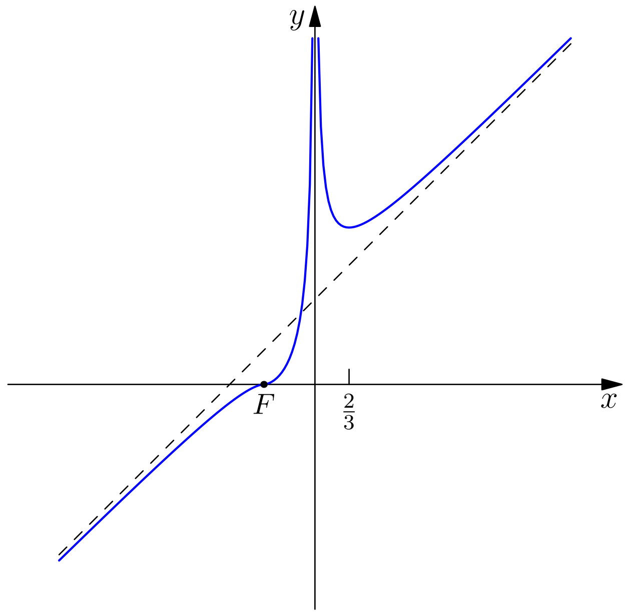
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}} = \frac{(x+1)^{5/3}}{x^{2/3}}\,,$$

la derivata prima di f, per $x \neq 0$, è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{5}{3}(x+1)^{2/3}x^{2/3} - \frac{2}{3}x^{-1/3}(x+1)^{5/3}}{x^{4/3}} \\ &= \frac{5(x+1)^{2/3}x - 2(x+1)^{5/3}}{3x^{5/3}} \\ &= \frac{(x+1)^{2/3}(5x - 2(x+1))}{3x^{5/3}} \\ &= \frac{(x+1)^{2/3}(3x-2)}{3x^{5/3}}\,. \end{aligned}$$

(d) Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $3x - 2 \geq 0$ e $x > 0$, ossia se e solo se $x < 0$ oppure $x \geq \frac{2}{3}$. In particolare, $f'(x) = 0$ per $x = -1$ e per $x = \frac{2}{3}$. Pertanto, la funzione f è crescente in $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ ed è decrescente in $(0, \frac{2}{3})$. Di conseguenza, f possiede un punto di minimo per $x = \frac{2}{3}$ e un flesso a tangente orizzontale per $x = -1$.

(e) Dallo studio fatto, si ha che il grafico qualitativo della funzione f è



Pertanto, il numero minimo di flessi compatibili di f è uno.

4. (a) La retta r' può essere determinata come la retta che passa per le proiezioni ortogonali P' e Q' sul piano π di due punti distinti P e Q di r. Scegliamo P come il punto di intersezione di r e π, ossia come la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + z = 4\,. \end{cases}$$

Si trova facilmente che $P \equiv (3, 0, -2)$. Poiché $P = r \cap \pi$, si ha $P' = P$. Scegliamo un secondo punto Q su r ponendo $x = 0$ nelle equazioni che definiscono r. Allora si ha $z = 4$ e $y = 3$, ossia $Q \equiv (0, 3, 4)$. Sia

$$n : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

la retta passante per Q e ortogonale a π. Intersecando n con π si trova $t = \frac{1}{2}$, e quindi la proiezione ortogonale di Q su π è $Q' \equiv (\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2})$. I parametri direttori di r' sono $P - Q' = (\frac{5}{2} : -2 : -\frac{13}{2}) = (5 : -4 : -13)$. Pertanto, si ha

$$r' = PQ' : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 0 - 4t \\ z = -2 - 13t\,. \end{cases}$$

(b) La retta r'' può essere determinata come la retta che passa per il punto P e per il punto Q'' simmetrico di Q rispetto a π. Il punto Q'' può essere visto come il punto per cui Q' sia il punto medio del segmento di estremi Q e Q''. Pertanto, se $Q'' \equiv (x, y, z)$, allora si ha

$$\frac{x+0}{2} = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{y+3}{2} = 2\,, \qquad \frac{z+4}{2} = \frac{9}{2}$$

ossia $x = 1$, $y = 1$ e $z = 5$. Pertanto $Q'' \equiv (1, 1, 5)$ e i parametri direttori di r'' sono $P - Q'' = (2 : -1 : -7)$. Quindi, si ha

$$r'' = PQ'' : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = -2 - 7t\,. \end{cases}$$