Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo compito in itinere – 23 Novembre 2015**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 10 punti	**Totale**

1. (a) Disegnare sul piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \; : \; 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 3\,, \; 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \; : \; w = \mathrm{i}\, z + 2 - 2\mathrm{i}\,, \; z \in A\}.$$

   (b) Determinare $A \cap B$.

2. Calcolare il limite

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right) \ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} - \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \right].$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = |x| \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

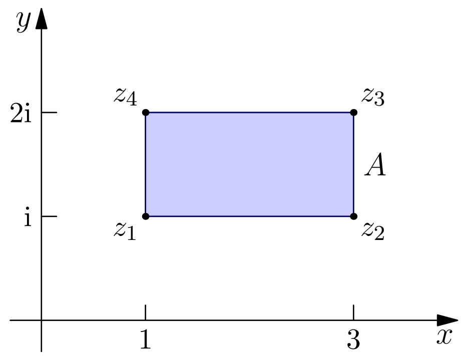
   (a) Determinare i limiti agli estremi del dominio di f e gli eventuali asintoti di f.
   (b) Determinare la derivata prima f'.
   (c) Determinare gli estremi locali di f.
   (d) Tracciare un grafico approssimativo di f.
   (e) Determinare l'immagine $\operatorname{Im} f$ di f.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

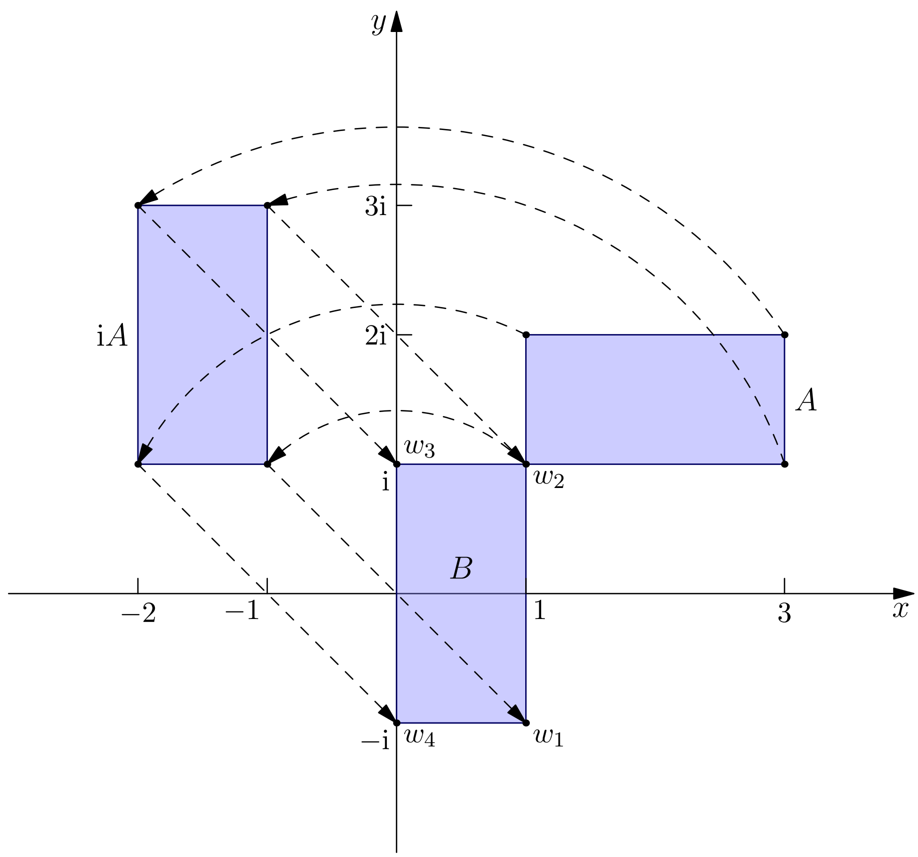
Soluzioni

1. (a) Posto $z = x + \mathrm{i}\,y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, l'insieme A è determinato dalle condizioni $1 \le x \le 3$ e $1 \le y \le 2$. Quindi A è il rettangolo



che ha per vertici $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 + \mathrm{i}$, $z_3 = 3 + 2\mathrm{i}$ e $z_4 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Poiché $B = \mathrm{i}\,A + 2 - 2\mathrm{i}$, si ha che l'insieme B si ottiene ruotando A attorno all'origine, in senso antiorario, di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e poi traslando l'insieme ottenuto di 2 lungo l'asse reale e di -2 lungo l'asse immaginario. Pertanto, B è il rettangolo



che ha per vertici $w_1 = 1 - \mathrm{i}$, $w_2 = 1 + \mathrm{i}$, $w_3 = \mathrm{i}$ e $w_4 = -\mathrm{i}$.

(b) Come si vede dalla figura precedente, gli insiemi A e B hanno in comune un solo punto, dato da $z_1 = w_2 = 1 + \mathrm{i}$. Pertanto $A \cap B = \{1 + \mathrm{i}\}$.

2. Poiché $\operatorname{tg}\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}$, si ha

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right) \ln\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} - \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right) \ln\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right).$$

Poiché $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni continue, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = 1\,.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = 1\,.$$

Quindi, essendo $\ln x$ una funzione continua, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = \ln 1 = 0\,.$$

Di conseguenza, la successione di cui si deve calcolare il limite è il prodotto di due successioni infinitesime e quindi $L = 0$.

3. (a) Iniziamo con l'osservare che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Poiché il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, i limiti agli estremi del dominio di f sono

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty \\
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0 \\
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto verticale di f per $x \to 0^-$. Inoltre, la funzione f possiede un asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \pm 1 \\
q &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} (|x|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \mp x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\pm x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \mp x) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \pm x\,(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \pm x\left(-\frac{1}{x}\right) = \mp 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = x - 1$ è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = -x + 1$ è l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Per $x \neq 0$, la derivata prima di f è

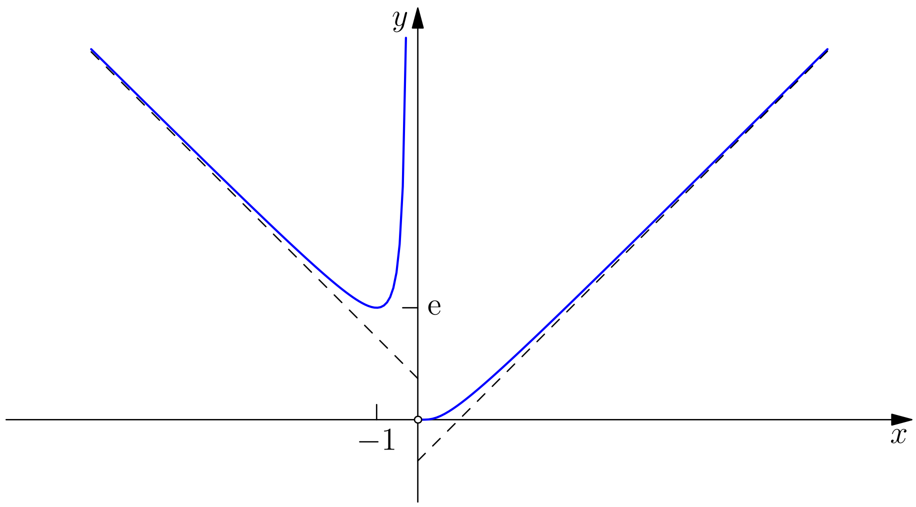
$$f'(x) = \operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{|x|}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \operatorname{sign}(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{\operatorname{sign}(x)}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \operatorname{sign}(x)\,\frac{x+1}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

ossia

$$f'(x) = \frac{x+1}{|x|}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,.$$

(c) Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x+1 \geq 0$, ossia $x \geq -1$. Pertanto, la funzione f é decrescente per $x < -1$ ed é crescente per $x > -1$. Di conseguenza, la funzione f ha un punto di minimo relativo in $(-1, \mathrm{e})$.

(d) Il grafico approssimativo di f è



(e) Come si vede dal grafico precedente, l'immagine di f è $\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$.