Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Primo compito in itinere – 24 Novembre 2015**

**Cognome:** ______________________________

**Nome:** ______________________________

**Matricola:** ______________________________

**Compito A**

| **Es. 1**: 8 punti | **Es. 2**: 8 punti | **Es. 3**: 10 punti | **Totale** |
|---|---|---|---|
| | | | |

1. (a) Disegnare sul piano di Gauss gli insiemi

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \leq |z| \leq 1 \, , \ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$
$$T = \left\{ w \in \mathbb{C} \ : \ w = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\, z + \mathrm{i} \, , \ \text{con } z \in S \right\} .$$

   (b) Determinare le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z-1)^3 = \mathrm{i}$$

   e scriverne le soluzioni in forma algebrica.

2. Calcolare il limite
$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1+\sqrt{3}\,\sin^2 x)}{\mathrm{tg} x^2 \cdot (\mathrm{e}^{2x}-1)^2} \, .$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

   per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinare i limiti agli estremi del dominio di $f$ e gli eventuali asintoti di $f$.

   (b) Determinare la derivata prima $f'$.

   (c) Determinare gli estremi locali di $f$.

   (d) Tracciare un grafico approssimativo di $f$.

---

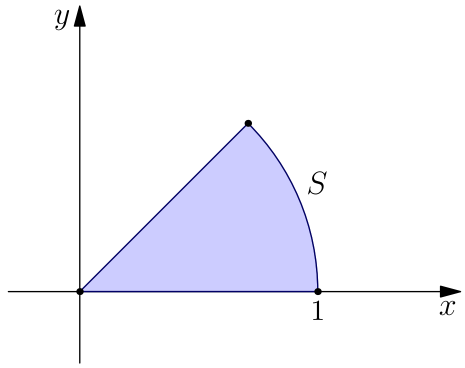
**Istruzioni.** *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *90 minuti.*

---

**Soluzioni**

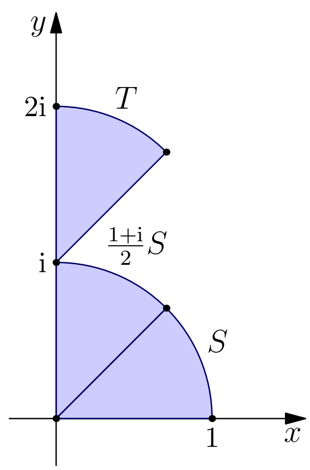
1. (a) L'insieme $S$ è il settore circolare con centro in $O \equiv (0,0)$, raggio $1$ e angoli tra $0$ e $\frac{\pi}{4}$, come in figura




Poiché $T = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} S + \mathrm{i}$ e poiché

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\,,$$

l'insieme $T$ si ottiene facendo ruotare $S$ attorno all'origine, in senso antiorario, di un angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e poi traslando di $1$ lungo l'asse immaginario l'insieme ottenuto. Pertanto, l'insieme $T$ è il settore circolare con centro in $(0,1)$, raggio $1$ e angoli tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$, come in figura




(b) Posto $w = z - 1$, l'equazione diventa $w^3 = \mathrm{i}$ e quindi si hanno le soluzioni

$$w_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \cos\frac{\pi + 4k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 4k\pi}{6}$$

per $k = 0, 1, 2$, ossia si hanno le soluzioni

$$\begin{aligned}
w_1 &= \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \\
w_2 &= \cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \\
w_3 &= \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Infine, le soluzioni dell'equazione iniziale sono

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + 1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \\ z_2 &= w_2 + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \\ z_3 &= w_3 + 1 = 1 - \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

2. Utilizzando le equivalenze asintotiche, si ha

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sqrt{3}\,\sin^2 x)}{\mathrm{tg}x^2 \cdot (e^{2x}-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{3}\,\sin^2 x)^2}{x^2(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{3}\,x^2)^2}{4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{4x^4} = \frac{3}{4}\,.$$

3. (a) Poiché il dominio di $f$ è $\mathbb{R}$, i limiti agli estremi del dominio di $f$ sono

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2} = +\infty\,. \end{aligned}$$

Pertanto, posiamo cercare un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Poiché $f(x) \sim x$ per $x \to \pm\infty$, si ha immediatamente $m = 1$. Inoltre, per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - x^2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1\right) \sim x\left(1 - \frac{1}{3x} - 1\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

Pertanto, si ha $q = -\frac{1}{3}$. Quindi, la retta di equazione $y = x - \frac{1}{3}$ è un asintoto obliquo di $f$ sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$.

(b) La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - x^2\right)^{-2/3}(3x^2 - 2x) = \frac{x(3x-2)}{3x^{2/3}(x-1)^{2/3}} = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x}\,(x-1)^{2/3}}$$

per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Pertanto la funzione non è derivabile per $x = 0, 1$, dove presenta una tangente verticale.

(c) Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{3x-2}{x} \geq 0$, ossia se e solo se $x < 0$ o $x \geq \frac{2}{3}$ con $x \neq 1$. Più precisamente, si ha

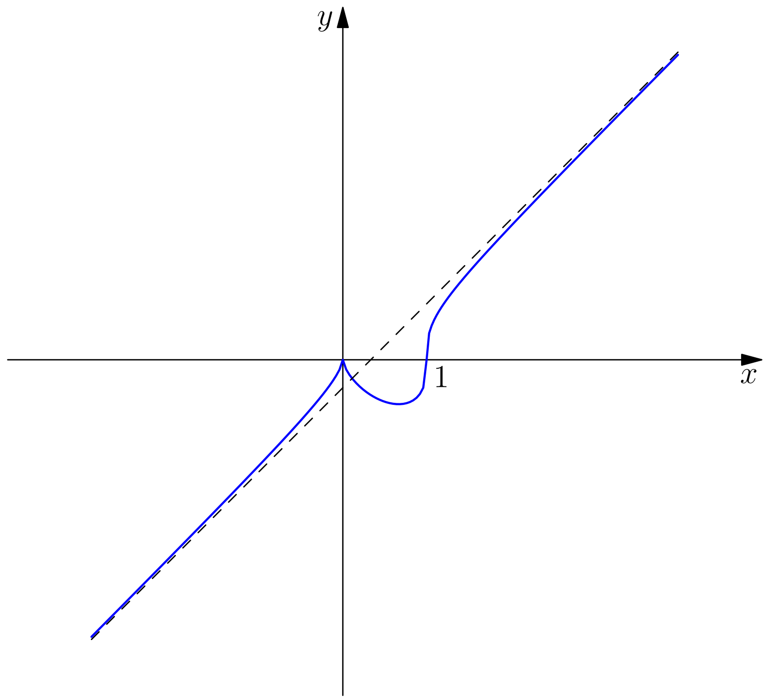
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } x < 0,\ \ x > \frac{2}{3}\ \ (x \neq 1) \\ f'(x) = 0 & \text{per } x = \frac{2}{3} \\ f'(x) < 0 & \text{per } 0 < x < \frac{2}{3}\,. \end{cases}$$

Inoltre, si hanno i limiti

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$

Quindi, in conclusione, si ha che la funzione $f$ presenta un massimo locale per $x = \frac{2}{3}$ (nel punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$) e presenta un punto di natura cuspidale e minimo locale per $x = 0$. Non ci sono altri estremanti.

(d) Il grafico approssimativo di $f$ è


y
x
1