Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere – 2 Febbraio 2016**

Cognome: ______________________ **Compito A**

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Es. 1: 8 punti	**Es. 2**: 8 punti	**Es. 3**: 10 punti	**Totale**

1. Sia data, per ogni valore del parametro reale α, la funzione definita da
$$f_\alpha(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{(\sin x)^{1-\alpha}}\,, \qquad x \in (0,1].$$
   (a) Stabilire per quali valori di α converge l'integrale
$$I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx\,.$$
   (b) Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 1$.

2. (a) Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
   dove
$$f(x) = e^x + \ln(1+x) - 1 - 2x$$
$$g(x) = 1 + \frac{3}{2}\left(\sin 2x + 2x^2\right) - (1+x)^3\,.$$
   (b) Disegnare l'andamento qualitativo di f e g in un intorno di $x = 0$.

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 + 1 \\ z = -2t^3 + t^2 + 2t + 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$
   (a) Verificare che γ è una curva piana, determinando l'equazione del piano π che la contiene.
   (b) Dopo aver verificato che il punto $P_0 \equiv (0,2,3)$ è un punto doppio di γ, determinare il coseno di uno dei due angoli (supplementari) formati dalle due tangenti a γ in P_0.
   (c) Scrivere l'equazione della sfera di centro $C \equiv (0,1,1)$ tangente al piano π.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

Soluzioni

1. (a) La funzione f_α é continua e positiva su tutto l'intervallo di integrazione. È pertanto possibile applicare il criterio del confronto asintotico. Per $x \to 0^+$, si ha

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{1-\alpha}} \sim \frac{1}{x^{1/2-\alpha}}\,.$$

Poiché la funzione $\frac{1}{x^{1/2-\alpha}}$ è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ solo per $1/2-\alpha < 1$, ossia solo per $\alpha > -1/2$, si ha che anche la funzione $f_0(x)$ è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ solo per $\alpha > -1/2$.

(b) Per $\alpha = 1$, si ha l'integrale

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - 1\,.$$

Posto $t = \sqrt{x}$, si ha $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ e

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \big[2t\mathrm{e}^t\big]_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - 2\big[\mathrm{e}^t\big]_0^1 = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2 = 2\,.$$

Pertanto, si ha $I_1 = 2 - 1 = 1$.

2. (a) Per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 1 - 2x = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ g(x) &= 1 + \frac{3}{2}\left(2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3) + 2x^2\right) - 1 - 3x - 3x^2 - x^3 \\ &= 3x - 2x^3 + o(x^3) + 3x^2 - 3x - 3x^2 - x^3 = -3x^3 + o(x^3)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-3x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{-3 + o(1)} = -\frac{1}{6}\,.$$

(b) Utilizzare gli sviluppi trovati nel punto precedente.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione vettoriale che parametrizza γ.

(a) Dalle prime due equazioni parametriche di γ, si ha $t^3 = x + t$, $t^2 = y - 1$. Quindi, sostituendo nella terza equazione, si ha $z = -2(x+t) + y - 1 + 2t + 2 = -2x + y + 1$. Pertanto γ è contenuta nel piano $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$.

(b) Si ha $P_0 \in \gamma$ se e solo se

$$\begin{cases} t^3 - t = 0 \\ t^2 + 1 = 2 \\ -2t^3 + t^2 + 2t + 2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} t(t^2-1) = 0 \\ t^2 - 1 = 0 \\ 2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t(t^2-1) = 0 \\ t^2 - 1 = 0 \\ (2t-1)(t^2-1) = 0 \end{cases}$$

e questo accade se e solo se $t = \pm 1$. Pertanto, la curva γ passa due volte per il punto $P_0 = f(-1) = f(1)$. Poiché

$$\begin{cases} x' = 3t^2 - 1 \\ y' = 2t \\ z' = -6t^2 + 2t + 2\,, \end{cases}$$

si ha $f'(-1) = (2, -2, -6)$ e $f'(1) = (2, 2, -2)$. Quindi le due tangenti a γ in P_0 sono individuate, ad esempio, dai vettori $\mathbf{a} = (1, -1, -3)$ e $\mathbf{b} = (1, 1, -1)$ il cui angolo θ è individuato dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{1 - 1 + 3}{\sqrt{11}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{11}}\,.$$

(c) Il raggio della sfera S cercata è

$$r = \mathbf{d}(C, \pi) = \frac{|-1 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Pertanto, si ha

$$S \;:\; x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{6}\,.$$