POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE

ANALISI E GEOMETRIA 1 **Primo Appello – 16 Febbraio 2016**

**Cognome:** _________________________ **Compito A**

**Nome:** _________________________

**Matricola:** _________________________

| **Es. 1**: 6 punti | **Es. 2**: 7 punti | **Es. 3**: 6 punti | **Es. 4**: 7 punti | **Totale** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. (a) Verificare che l'equazione
$$z^3 - (1-2\mathrm{i})\,z^2 - (2+(2+\sqrt{3})\mathrm{i})\,z + 2 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$$
con $z \in \mathbb{C}$, ammette una radice reale di modulo unitario e trovare le altre radici.
   (b) Disegnare sul piano di Gauss l'insieme delle soluzioni.

2. Sia $f : (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \frac{x}{x+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$
   (a) Trovare gli eventuali punti di minimo o di massimo locale di $f$.
   (b) Stabilire se ci sono asintoti e disegnare il grafico di $f$.
   (c) Stabilire se l'integrale generalizzato
$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
è convergente.

3. (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = 2x\,(y(x)^2 - 1) \\ y(0) = 2\,. \end{cases}$$
   (b) Specificare il dominio di definizione della soluzione trovata al punto precedente.

4. (a) Stabilire la posizione reciproca delle rette
$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ x + 6y + 3z - 10 = 0\,. \end{cases}$$
   (b) Stabilire se le rette $r$ ed $s$ sono complanari. In caso affermativo, determinare il piano $\pi$ che le contiene.
   (c) Determinare i punti di $r$ che distano $\sqrt{6}$ dal piano $\pi' : x + y - 2z + 1 = 0$.

---

**Istruzioni.** *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *2 ore.*

---

**Soluzioni**

1. (a) L'equazione data può essere riscritta nel modo seguente

$$z^3 - z^2 - 2z + 2 + (2z^2 - (2+\sqrt{3})\,z + \sqrt{3})\,\mathrm{i} = 0$$

ossia

$$z^2(z-1) - 2(z-1) + (2z(z-1) - \sqrt{3}(z-1))\,\mathrm{i} = 0$$

ossia

$$(z-1)(z^2-2) + (z-1)(2z-\sqrt{3})\,\mathrm{i} = 0$$

ossia

$$(z-1)(z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}) = 0\,.$$

Pertanto, si ha $z_1 = 1$ come soluzione. Le altre due soluzioni sono le soluzioni dell'equazione polinomiale di secondo grado

$$z^2 + 2\mathrm{i}z - 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = 0\,.$$

Applicando l'usuale formula risolutiva, si ha

$$\begin{aligned} z_{2,3} &= -\mathrm{i} \pm \sqrt{1+\mathrm{i}\,\sqrt{3}} = -\mathrm{i} \pm \sqrt{\frac{2+2\mathrm{i}\,\sqrt{3}}{2}} = -\mathrm{i} \pm \sqrt{\frac{3+2\mathrm{i}\,\sqrt{3}-1}{2}} \\ &= -\mathrm{i} \pm \sqrt{\frac{3+2\mathrm{i}\,\sqrt{3}+\mathrm{i}^2}{2}} = -\mathrm{i} \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}{2}} = -\mathrm{i} \pm \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

(b) A questo punto è immediato disegnare i $3$ punti sul piano di Gauss.

2. Si osservi che la funzione è pari.

(a) In ogni punto del suo dominio, la funzione $f$ è derivabile e

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{x}{x+1}\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{-x^2-x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

I punti critici sono

$$x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{punto di minimo locale}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{punto di massimo locale.}$$

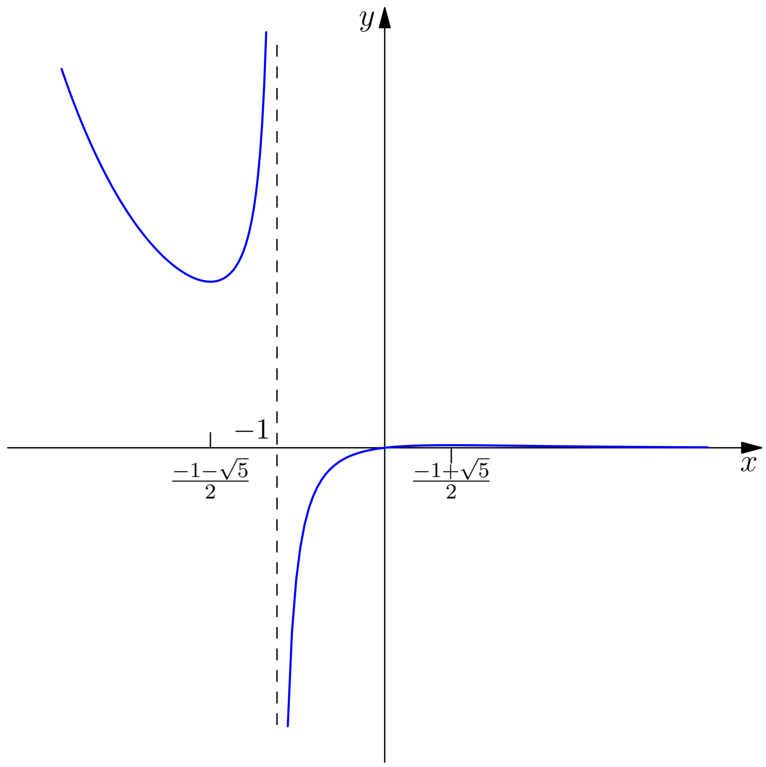
(b) Poiché

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

si ha un asintoto verticale di equazione $x = -1$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$

si ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ par $x \to +\infty$. Il grafico di $f$ è




(c) La restrizione di $f$ a ogni intervallo compatto $[0,b]$, con $b>0$, è integrabile (essendo $f$ continua). Per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\, \mathrm{e}^{-x} \sim \mathrm{e}^{-x} = (x^2 \mathrm{e}^{-x})\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

definitivamente. Dunque $f$ è integrabile su $(0,+\infty)$.

3. (a) L'equazione differenziale data é a variabili separabili. Le soluzioni singolari sono $y(x)=1$ e $y(x)=-1$, mentre le altre soluzioni si trovano separando le variabili:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} = \int 2x\,\mathrm{d}x\ .$$

Poiché

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(\ln|y-1| - \ln|y+1|) + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c\,,$$

si ha

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2 + c\,.$$

ossia

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \mathrm{e}^{2x^2+2c} = k\mathrm{e}^{2x^2}$$

dove $k = \mathrm{e}^{2c}$. Pertanto, si ha

$$\frac{y-1}{y+1} = +\pm\, k\mathrm{e}^{2x^2} = K\mathrm{e}^{2x^2}$$

dove $K = \pm k$. Di conseguenza, si ottiene

$$y(x) = \frac{1+K\mathrm{e}^{2x^2}}{1-K\mathrm{e}^{2x^2}}$$

con $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2$, si ha

$$2 = \frac{1+K}{1-K} \qquad \text{ossia} \qquad K = \frac{1}{3}.$$

Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{3 + e^{2x^2}}{3 - e^{2x^2}}.$$

(b) La funzione trovata nel punto precedente è definita per $3 - e^{2x^2} \neq 0$, ossia per $x \neq \pm\sqrt{\frac{\ln 3}{2}}$. Pertanto, tale funzione ammette come dominio di definizione l'insieme

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{\ln 3}{2}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{\ln 3}{2}}, \sqrt{\frac{\ln 3}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{\ln 3}{2}}, +\infty\right).$$

Poiché

$$y_0 = 0 \in \left(-\sqrt{\frac{\ln 3}{2}}, \sqrt{\frac{\ln 3}{2}}\right),$$

quest'ultimo é l'intervallo di definizione della soluzione $y$.

4. (a) I parametri direttori di $r$ sono $(-1 : 1 : -2) = (1 : -1 : 2)$. I parametri direttori di $s$ sono

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right) = (12 : -4 : 4) = (3 : -1 : 1).$$

Avendo parametri direttori non proporzionali, le due rette $r$ ed $s$ non sono parallele. Intersecando $r$ ed $s$ si ha il sistema

$$\begin{cases} 2 - t + 2 + 2t - 1 + 2t - 6 = 0 \\ 2 - t + 6 + 6t + 3 - 6t - 10 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ t - 1 = 0. \end{cases}$$

Poiché tale sistema è compatibile, avendo come unica soluzione $t = 1$, le due rette $r$ ed $s$ sono incidenti nel punto $P \equiv (1, 2, -1)$.

(b) Essendo incidenti, le due rette $r$ ed $s$ sono complanari. Il piano $\pi$ che le contiene passa per il punto $P$ e ha come direzione ortogonale quella data dal vettore

$$(1, -1, 2) \wedge (3, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 5, 2).$$

Pertanto, si ha

$$\pi \ : \ 1(x-1) + 5(y-2) + 2(z+1) = 0$$

ossia

$$\pi \ : \ x + 5y + 2z - 9 = 0.$$

(c) Consideriamo il generico punto $Q \equiv (2 - t, 1 + t, 1 - 2t)$ della retta $r$. Allora, si ha

$$\mathbf{d}(Q, \pi') = \frac{|2 - t + 1 + t - 2 + 4t + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|4t + 2|}{\sqrt{6}}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(Q,\pi') = \sqrt{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{|4t+2|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \\
&\Longleftrightarrow \quad |4t+2| = 6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4t+2 = \pm 6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4t = -2 \pm 6 \\
&\Longleftrightarrow \quad t = -2, 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, si hanno i punti $Q_1 \equiv (4,-1,5)$ e $Q_2 = P \equiv (1,2,-1)$.