Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Secondo Appello – 6 Luglio 2016**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 5 punti	**Es. 3**: 9 punti	**Es. 4**: 6 punti	**Totale**

1. (a) Disegnare sul piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \ : \ \frac{|z+1|}{|z-\mathrm{i}|} = 2 \right\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z = \frac{1}{3} \right\}.$$

   (b) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{|z+1|}{|z-\mathrm{i}|} = 2 \\ \operatorname{Re} z = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

2. Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x} \right).$$

3. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}}.$$

   (a) Determinare il campo di esistenza e gli eventuali asintoti di f.

   (b) Determinare gli eventuali massimi e minimi di f.

   (c) Senza calcolare la derivata seconda, disegnare il grafico di f.

   (d) Determinare l'immagine di f.

   (e) Stabilire se l'integrale improprio

$$I = \int_2^{+\infty} \big(1 - f(x)\big)\, dx$$

   converge.

4. (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo alla retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

   e passante per i punti $A \equiv (2, 1, -1)$ e $B \equiv (1, 3, 1)$.

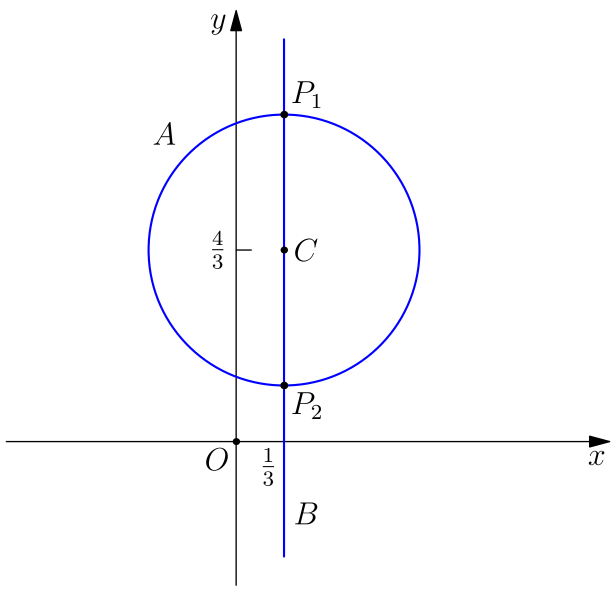
   (b) Determinare i punti P della retta r per i quali il triangolo APB è rettangolo in P.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 45 minuti.*

Soluzioni

1. (a) L'equazione che definisce l'insieme A è $|z+1| = 2|z-\mathrm{i}|$. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, con $x.y \in \mathbb{R}$, si ha
$$|(x+1) + \mathrm{i}y| = 2|x + \mathrm{i}(y-1)|$$
ossia
$$(x+1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-1)^2)$$
ossia
$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}\,x - \frac{8}{3}\,y + 1 = 0$$
ossia
$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\,.$$
Si ha così una circonferenza di centro $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\,\mathrm{i}$ e raggio $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.
L'insieme B è una retta verticale che passa per tutti i punti di ascissa $\frac{1}{3}$. Quindi, in particolare, passa anche per il centro della circonferenza.



(b) Dalla figura precedente è immediato risolvere il sistema. Basta aggiungere e togliere il raggio alla parte immaginaria del centro. Le soluzioni sono quindi
$$z_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\,\mathrm{i}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(2 + \sqrt{2}\right)\mathrm{i}$$
$$z_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\,\mathrm{i}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\mathrm{i}\,.$$

2. Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin del terzo ordine della funzione $\sin x$, si ha
$$\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) = \frac{1}{x^\alpha}\,\frac{(\sin x)^2 - x^2}{x \sin x} = \frac{1}{x^\alpha}\,\frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - x^2}{x\,(x + o(x))}$$
$$= \frac{1}{x^\alpha}\,\frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2}{x\,(x + o(x))} = \frac{1}{x^\alpha}\,\frac{x^4\left(-\frac{1}{3} + o(1)\right)}{x^2\,(1 + o(1))}$$
$$= \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,\frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \sim -\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{\alpha-2}}\,.$$

Quindi, si ha

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2, \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2\,. \end{cases}$$

3. La funzione f è pari. Quindi basta studiarla per $x \geq 0$.

   (a) La funzione f è definita solo per $x \neq \pm 2$. Si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}} = 0 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) = \lim_{x\to (-2)^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to (-2)^-} f(x) = \lim_{x\to (-2)^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}} = 0\,.$$

   Pertanto, f ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = 2$ per $x \to 2^-$ e ha ha come asintoto verticale la retta di equazione $x = -2$ per $x \to (-2)^+$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}} = 1\,.$$

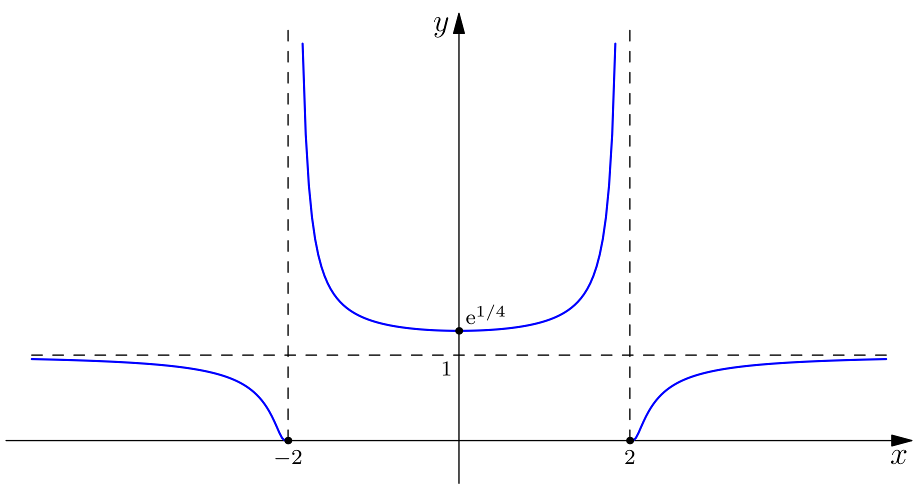
   Quindi f possiede anche un asintoto verticale, di equazione $y = 1$, per $x \to \pm\infty$.

   (b) La funzione f è derivabile per ogni $x \neq \pm 2$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}}\,.$$

   Pertanto, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Quindi f presenta un punto di minimo locale in corrispondenza di $x = 0$, dato da $M \equiv (0, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}})$. Non ci sono altri punti di estremo.

   (c) Il grafico di f è



   (d) L'immagine di f è $\operatorname{Im} f = (0,1) \cup [\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}, +\infty)$.

   (e) La funzione

$$g(x) = 1 - f(x) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{4-x^2}}$$

   è definita, continua e positiva su tutto l'intervallo $(2, +\infty)$. Per $x \to 2^+$, la funzione f è limitata (poiché $f(x) \to 0$, come abbiamo già visto). Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha

$$\frac{1}{4-x^2} \to 0$$

e quindi

$$g(x) \sim -\frac{1}{4-x^2} \sim \frac{1}{x^2}\,.$$

Poiché la funzione $1/x^2$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico si ha che anche la funzione $g(x)$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Pertanto, in conclusione, l'integrale improprio I converge.

4. (a) Primo modo. Nel fascio di piani che ha per sostegno la retta AB, cerchiamo quello parallelo a r. La retta AB è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+2t\,. \end{cases}$$

Ricavando t dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due, si ottengono le equazioni $2x+y-5=0$ e $2x+z-3=0$, che rappresentano due piani che contengono la retta AB. Il fascio dei piani che contengono la retta AB è allora rappresentato dall'equazione

$$\lambda(2x+y-5)+\mu(2x+z-3)=0$$

ossia dall'equazione

$$(2\lambda+2\mu)x+\lambda y+\mu z-5\lambda-3\mu=0\,.$$

Il generico piano del fascio è parallelo alla retta r se e solo se il vettore $\mathbf{u}=(2\lambda+2\mu,\lambda,\mu)$ ad esso ortogonale è ortogonale al vettore direttore di r dato da $\mathbf{v}=(2,1,2)$. Ciò avviene se e solo se $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$, ossia se e solo se $4\lambda+4\mu+\lambda+2\mu=0$, cioé $5\lambda+6\mu=0$. Quindi, possiamo scegliere $\lambda=6$ e $\mu=-5$. Sostituendo questi valori nell'equazione del fascio e semplificando, si ottiene il piano

$$\pi \;:\; 2x+6y-5z-15=0\,.$$

Secondo modo. Il piano π cercato è il piano che passa per il punto A e che ha come direzione ortogonale quella individuata dal vettore $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$, dove $\mathbf{v}=(2,1,2)$ è un vettore direttore di r e $\mathbf{w}=B-A=(-1,2,2)$. Poiché

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-6,5)\,,$$

si ha

$$\pi : -2(x-2)-6(y-1)+5(z+1)=0$$

ossia

$$\pi \;:\; 2x+6y-5z-15=0\,.$$

(b) Sia $P \equiv (1+2t, 3+t, 2t)$ il generico punto della retta r. Il triangolo APB è rettangolo in P se e solo se i vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ sono ortogonali, cioé se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché risulta

$$\overrightarrow{AP} = (1+2t,3+t,2t)-(2,1,-1) = (2t-1,t+2,2t+1)$$
$$\overrightarrow{BP} = (1+2t,3+t,2t)-(1,3,1) = (2t,t,2t-1)\,,$$

si ha

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = 9t^2-1\,.$$

Quindi, il prodotto scalare $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ si annulla se e solo se $t=1/3$ oppure $t=-1/3$. Questi due valori del parametro t corrispondono rispettivamente ai due punti

$$P_1 \equiv \left(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 \equiv \left(\frac{1}{3},\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)\,.$$