Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Secondo Appello – 5 Settembre 2016**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es. 1: 6 punti	**Es. 2**: 9 punti	**Es. 3**: 6 punti	**Es. 4**: 5 punti	**Totale**

1. (a) Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\mathcal{T}_1$ di tutti i punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z = \sqrt{\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^5}{(1-i)^7}}\,.$$

   (b) Disegnare gli insiemi $\mathcal{T}_2 = \{\, \overline{z} \;:\; z \in \mathcal{T}_1 \,\}$ e $\mathcal{T}_3 = \{\, -4\mathrm{i}z \;:\; z \in \mathcal{T}_1 \,\}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}\,.$$

   (a) Determinare gli eventuali asintoti di f.

   (b) Stabilire se f è strettamente crescente.

   (c) Stabilire se f è invertibile.

   (d) Utilizzando solo le informazioni ottenute nei punti precedenti, disegnare il grafico di f.

   (e) Stabilire se è convergente l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \Big(x - f(x)\Big)\, dx\,.$$

3. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \sin\theta\cos\theta \\ y = \sin^2\theta \\ z = \cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

   e il punto $P_0 \in \gamma$ corrispondente al valore $\theta = 0$ del parametro.

   (a) Determinare la terna intrinseca $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ nel punto P_0.

   (b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano osculatore a γ in P_0.

   (c) Calcolare la curvatura di γ in P_0.

4. Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{artg} n^\alpha}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}\,.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 45 minuti.*

Soluzioni

1. (a) Il radicando puó essere espresso come $\dfrac{w_1^5}{w_2^7}$, dove

$$w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} = \cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\,\mathrm{i}}$$
$$w_2 = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi\,\mathrm{i}}\,.$$

Pertanto, per il teorema di De Moivre, si ha

$$w_1^5 = \cos\frac{25}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{25}{6}\pi = \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\,\mathrm{i}}$$
$$w_2^7 = \sqrt{2^7}\left(\cos\frac{49}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{49}{4}\pi\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}$$

e quindi

$$\frac{w_1^5}{w_2^7} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\,\mathrm{i}}}{8\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}} = \frac{\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})\,\mathrm{i}}}{8\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\,\mathrm{i}}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

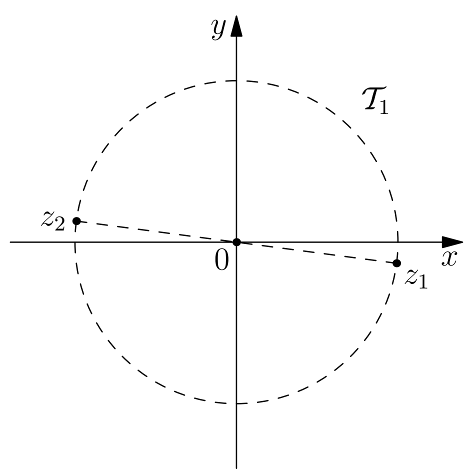
In conclusione, le due radici sono

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{\sqrt{8\sqrt{2}}}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{12}+2k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{12}+2k\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{24}+k\pi\right)\right] \qquad k = 0, 1\,, \end{aligned}$$

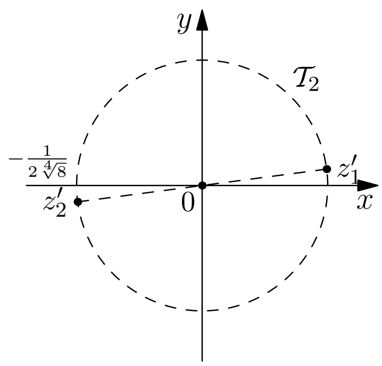
ossia

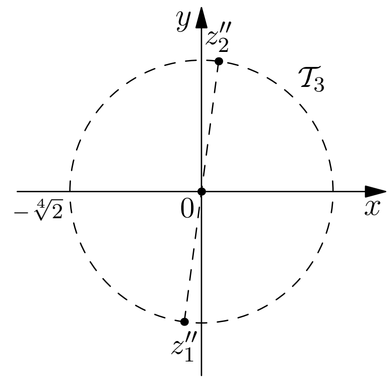
$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right]$$
$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\left[\cos\frac{23}{24}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{23}{24}\pi\right].$$

Pertanto $\mathcal{T}_1 = \{z_1, z_2\}$ e



(b) L'insieme $\mathcal{T}_2 = \{\,\overline{z}\ :\ z \in \mathcal{T}_1\,\} = \overline{\mathcal{T}}_1 = \{z_1', z_2'\}$ è il simmetrico di $\mathcal{T}_1$ rispetto all'asse x, mentre l'insieme $\mathcal{T}_3 = \{\,-4\mathrm{i}z\ :\ z \in \mathcal{T}_1\,\} = -4\mathrm{i}\mathcal{T}_1 = \{z_1'', z_2''\}$ si ottiene da $\mathcal{T}_1$ tramite una rotazione, attorno all'origine, di un angolo $\theta = \pi/2$ in senso orario seguita da una dilatazione di ragione 4. Pertanto, si ha





2. (a) Essendo definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione f non possiede asintoti verticali. Inoltre, per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = 2x - \sqrt{1+x^2} \sim 2x - |x|$, ossia $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$ e $f(x) \sim 3x$ per $x \to -\infty$. Pertanto, f non possiede asintoti orizzontali, essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty\,,$$

ma possiede la retta di equazione $y = x$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = 3x$ come asintoto obliquo per $x \to -\infty$, essendo

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{1+x^2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

e

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$
$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to-\infty} (-x - \sqrt{1+x^2}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

(b) La funzione f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Chiaramente, $f'(x) > 0$ per ogni $x \leq 0$. Inoltre, essendo $1 + x^2 \geq x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed essendo $\sqrt{x}$ una funzione crescente per ogni $x > 0$, si ha $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = x$ per ogni $x > 0$. Quindi, si ha

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{x} = 1$$

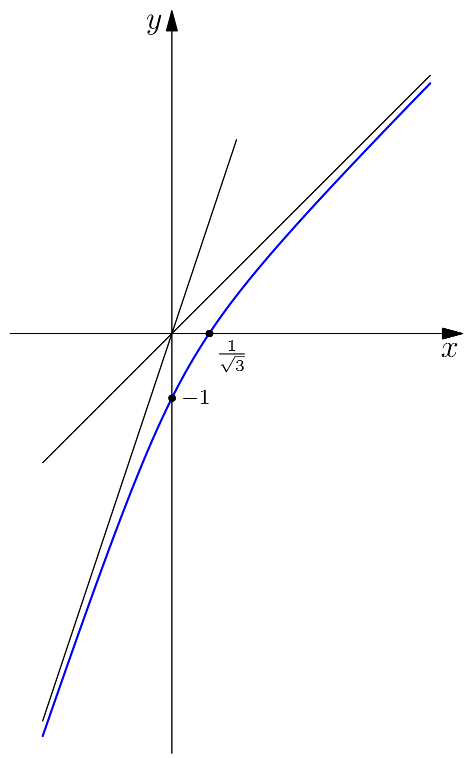
per ogni $x > 0$, ossia $f'(x) \geq 1 > 0$ per ogni $x > 0$. Pertanto, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed f è strettamente crescente.
Equivalentemente, essendo il denominatore sempre positivo, si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

se e solo se $2\sqrt{1+x^2} > x$, ossia $4 + 4x^2 > x^2$, ossia $4 + 3x^2 > 0$, e quest'ultima disuguaglianza è sempre verificata. Pertanto $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia f è strettamente crescente.

(c) Poiché f è continua e $f \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, la funzione f è suriettiva. Inoltre, essendo strettamente crescente, f è iniettiva. Quindi, essendo suriettiva e iniettiva, f è biunivoca, e quindi invertibile.

(d) Il grafico di f è



(e) La funzione integranda

$$g(x) = x - f(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$$

è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$. Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{x}\,.$$

Poiché la funzione $1/x$ non è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico nemmeno la funzione g è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale improprio I non è convergente (ma divergente a $+\infty$).

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione vettoriale, definita da $f(\theta) = (\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta, \cos\theta)$, che parametrizza γ.

(a) Il vettore velocità è $f'(\theta) = (\cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta, -\sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta, -\sin\theta)$, e quindi si ha

$$f'(0) = (1, 0, 0) = \mathbf{t}(0)\,.$$

Il vettore accelerazione è $f''(\theta) = (-2\sin 2\theta, 2\cos 2\theta, -\cos\theta)$ e quindi $f''(0) = (0, 2, -1)$. Poiché, in questo caso particolare, il vettore $f''(0)$ è ortogonale al versore tangente $\mathbf{t}(0)$, il versore normale $\mathbf{n}(0)$ si ottiene normalizzando $f''(0)$, ossia

$$\mathbf{n}(0) = \frac{f''(0)}{|f''(0)|} = \frac{(0, 2, -1)}{\sqrt{5}} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Infine, il versore binormale è dato dal prodotto vettoriale

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{t}(0) \wedge \mathbf{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

(Equivalentemente, si trova prima $\mathbf{b}(0)$ normalizzando $f'(0) \wedge f''(0)$ e poi si trova $\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0)$.)

(b) Il piano osculatore cercato è il piano che passa per $f(0) = (0,0,1)$ ed è ortogonale al versore binormale $\mathbf{b}(0)$. Quindi è il piano di equazione

$$0(x-0) + 1(y-0) + 2(z-1) = 0$$

ossia di equazione $y + 2z - 2 = 0$.

(c) La curvatura cercata è

$$\kappa(0) = \frac{|f'(0) \wedge f''(0)|}{|f'(0)|^3} = \sqrt{5}\,.$$

4. Per $n \to +\infty$, si ha

$$\operatorname{artg} n^\alpha \sim \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se } \alpha > 0 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{se } \alpha = 0 \\ n^\alpha & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Inoltre, sempre per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}{n+2-n+2} \sim \frac{2\sqrt{n}}{4} = \frac{\sqrt{n}}{2}\,.$$

Quindi, per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{\operatorname{artg} n^\alpha}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}} \sim \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\sqrt{n} & \text{se } \alpha > 0 \\ \dfrac{\pi}{8}\sqrt{n} & \text{se } \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{2}\, n^{\alpha+1/2} & \text{se } \alpha < 0, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{artg} n^\alpha}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > -1/2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } \alpha = -1/2 \\ 0^+ & \text{se } \alpha < -1/2. \end{cases}$$