Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo compito in itinere – 21 Novembre 2016**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

T.1: 5 punti	**T.2**: 3 punti	**Totale**	**Es.1**: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 10 punti	**Totale**

1. Si consideri la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$(z+1)^6 = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3. \qquad (*)$$

   (a) Determinare le soluzioni dell'equazione $(*)$ e rappresentarle sul piano complesso.

   (b) Descrivere l'insieme

$$S = \left\{ w = z^{-1} \ : \ z \text{ è soluzione di } (*) \text{ con } \operatorname{Re} z > 0 \right\}$$

   e rappresentarlo sul piano complesso.

2. Siano f e g le funzioni definite da

$$f(x) = \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{artg}(\sin 9x)} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

   (a) Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} g(x).$$

   (b) Siano F e G le funzioni ottenute prolungando con continuità le funzioni f e g in $x_0 = 0$. Mostrare, in base al risultato ottenuto, che le funzioni F e G hanno la stessa retta tangente per $x_0 = 0$. Scrivere l'equazione di questa retta.

3. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x}.$$

   (a) Determinare i limiti e gli eventuali asintoti di f.

   (b) Determinare i punti di derivabilità di f e la derivata prima f'.

   (c) Studiare la monotonia e gli estremi locali di f.

   (d) Disegnare il grafico qualitativo di f.

   (e) Determinare l'esistenza di almeno una soluzione $x \in (0, +\infty)$ dell'equazione $f(x) = 4x - 1$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *15 minuti.* Seconda parte: *1 ora e 45 minuti.*

Soluzioni

1. (a) Iniziamo ad osservare che, per la formula di De Moivre, si ha

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3 = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = 8\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -8\,.$$

Pertanto, l'equazione di partenza diventa $(z+1)^6 = -8$. Posto $w = z+1$, si ha l'equazione $w^6 = -8$, che la sei soluzioni

$$w_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \qquad k = 0,1,2,3,4,5\,,$$

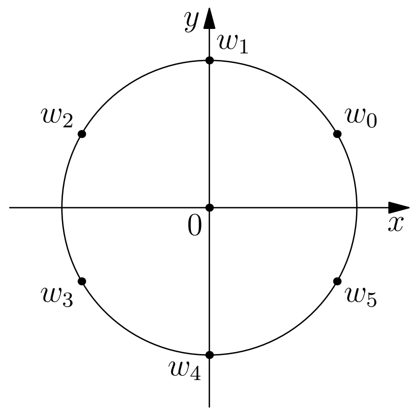
ossia

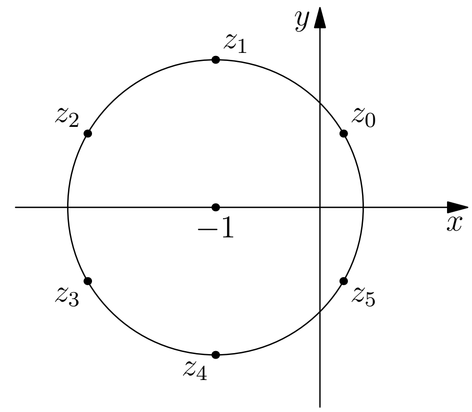
$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
w_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{i}\\
w_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\,\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
w_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\,\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
w_4 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{2}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\,\pi\right) = -\sqrt{2}\,\mathrm{i}\\
w_5 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{11}{6}\,\pi\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, le soluzioni dell'equazione $(*)$ di partenza sono

$$\begin{aligned}
z_0 &= w_0 - 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_1 &= w_1 - 1 = -1 + \sqrt{2}\,\mathrm{i}\\
z_2 &= w_2 - 1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_3 &= w_3 - 1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\\
z_4 &= w_4 - 1 = -1 - \sqrt{2}\,\mathrm{i}\\
z_5 &= w_5 - 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

I punti $w_0, \ldots, w_5$ si dispongono lungo la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $R = \sqrt{2}$, come nella figura seguente. I punti $z_0, \ldots, z_5$ si ottengono da quelli precedenti mediante una traslazione di -1 lungo l'asse reale, come nella figura seguente.





(b) Le soluzioni dell'equazione $(*)$ con parte reale positiva sono

$$z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{e} \qquad z_5 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$$

Poiché

$$|z_0|^2 = |z_5|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{6} + 1 + \frac{1}{2} = 3 - \sqrt{6}\,,$$

si ha

$$z_0^{-1} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2} = \frac{1}{3-\sqrt{6}}\,\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)} = \frac{1}{3-\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)$$

$$z_5^{-1} = \frac{\overline{z_5}}{|z_5|^2} = \frac{1}{3-\sqrt{6}}\,\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)} = \frac{1}{3-\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right).$$

2. (a) Utilizzando le equivalenze asintotiche, per $x \to 0$, si ha

$$1 - \cos 3x \sim \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9}{2}\,x^2 \qquad\qquad \sqrt[4]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{4}\,x^2$$

$$\operatorname{artg}(\sin 9x) \sim \sin 9x \sim 9x \qquad\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{artg}(\sin 9x)} \sim \frac{\frac{9}{2}x^2}{9x} = \frac{1}{2}\,x$$

$$g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \sim \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,x\,.$$

Pertanto, si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0\,.$$

(b) Poiché i due limiti precedenti esistono finiti e sono nulli, le funzioni f e g possono essere estese con continuità in $x_0 = 0$ considerando, in un intorno di $x_0 = 0$, le funzioni F e G definite da

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 0 \\ 0 & 0 = 0\,. \end{cases}$$

Poiché $F(0) = 0$ e $G(0) = 0$, il grafico di F ed il grafico di G passano entrambi per il punto $(0,0)$. Per determinare la pendenza della retta tangente, si può utilizzare il precedente calcolo dei limiti. Poiché entrambe le funzioni sono asintotiche a $\frac{1}{2}x$, il coefficiente angolare è $m = \frac{1}{2}$. In conclusione, in entrambi i casi, la retta tangente ha equazione $y = \frac{1}{2}x$.

Osservazione. Equivalentemente, si può dimostrare che le due funzioni F e G sono derivabili in $x_0 = 0$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\
\lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Si ritrova così che, in entrambi i casi, la retta tangente esiste e ha equazione $y = \frac{1}{2}x$.

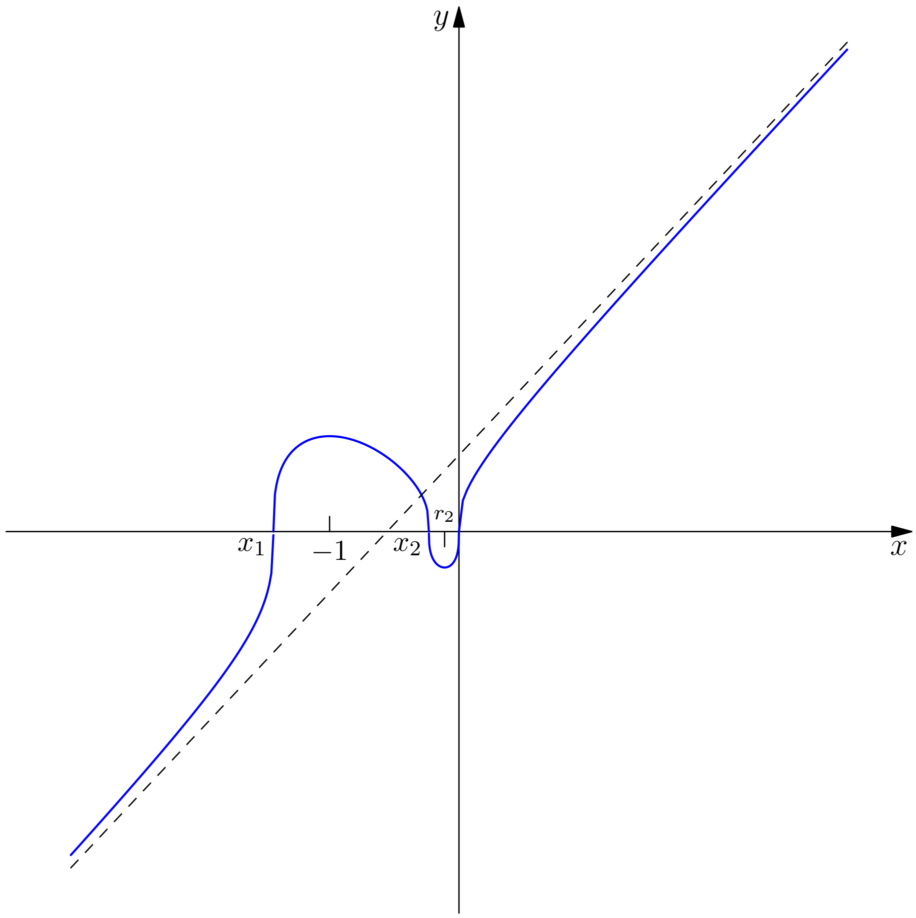
3. Iniziamo con l'osservare che la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$.

   (a) Si ha
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$
   Per $x \to \pm\infty$, si ha
   $$f(x) = \sqrt[3]{3}\,x\,\sqrt[3]{1 + \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^2}} \sim \sqrt[3]{3}\,x$$
   e
   $$f(x) - \sqrt[3]{3}\,x = \sqrt[3]{3}\,x\left[\sqrt[3]{1 + \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^2}} - 1\right] \sim \sqrt[3]{3}\,x\,\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{3^2}\left(5 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{5}{3\sqrt[3]{9}}.$$
   Quindi, si ha
   $$\begin{aligned}
   m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{3}\,x}{x} = \sqrt[3]{3} \\
   q &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \sqrt[3]{3}\,x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{9}}.
   \end{aligned}$$
   Pertanto, f possiede uno stesso asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ di equazione
   $$y = \sqrt[3]{3}\,x + \frac{5}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{9x + 5}{3\sqrt[3]{9}}.$$

   (b) La funzione non è derivabile solo nei punti in cui si annulla, ossia nei punti
   $$x_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$
   Negli altri punti di $\mathbb{R}$ è derivabile poiché composta di funzioni derivabili e si ha
   $$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{9x^2 + 10x + 1}{(3x^3 + 5x^2 + x)^{2/3}} \qquad x \notin \{x_0, x_1, x_2\}.$$
   Si osservi che nei punti di non derivabilità, la funzione f ha tangente verticale.

   (c) Il segno di f' coincide con quello della funzione g definita da
   $$g(x) = 9x^2 + 10x + 1 = 9(x - r_1)(x - r_2)$$
   dove $r_1 = -1$ e $r_2 = -\frac{1}{9}$. La funzione f è quindi crescente su $(-\infty, r_1) \cup (r_2, +\infty)$ e decrescente su (r_1, r_2). La funzione ha pertanto un massimo relativo in r_1 e un minimo relativo in r_2. Più precisamente, ha un massimo relativo nel punto $(-1, 1)$ e ha un minimo relativo nel punto $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{\sqrt[3]{13}}{3\sqrt[3]{9}}\right)$.

(d) Il grafico di f è



(e) Consideriamo la funzione $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = f(x) - 4x + 1$. La funzione F è continua (essendo formata da funzioni continue), $F(0) = 1 > 0$ e $F(1) = \sqrt[3]{9} - 3 < 0$. Per il Teorema degli zeri, esiste almeno un elemento $\xi_0 \in (0,1)$ tale che $F(\xi_0) = 0$. Quindi esiste almeno una soluzione $\xi_0 \in (0,1) \subseteq (0,+\infty)$ dell'equazione assegnata.