Politecnico di Milano — Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — **Primo compito in itinere – 22 Novembre 2016**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Compito A

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 10 punti	**Totale**

1. Si consideri la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$z^2 = -2\overline{z}. \qquad (*)$$

(a) Determinare le soluzioni di $(*)$ e rappresentarle sul piano complesso.

(b) Descrivere l'insieme

$$S = \left\{ w \in \mathbb{C} \;:\; w^2 = z \text{ ove } z \text{ è soluzione di } (*) \text{ con } \operatorname{Re} z > 0 \right\}$$

e rappresentarlo sul piano complesso.

2. Data la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 + x^3}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin(\operatorname{artg} 2x^2)}$$

(a) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

(b) Sia F il prolungamento con continuità di f nel punto $x_0 = 0$. Mostrare che la retta di equazione $y = 0$ è la retta tangente di F in $x_0 = 0$. Disegnare l'andamento locale del grafico di F in un intorno di $x_0 = 0$.

3. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x\, \mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}}.$$

(a) Determinarne i limiti e gli eventuali asintoti di f.

(b) Determinare i punti di derivabilità di f e la derivata prima f'.

(c) Studiare la monotonia e gli estremi locali di f.

(d) Disegnare il grafico qualitativo di f.

(e) Determinare l'immagine dell'intervallo $I = (1, +\infty)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 45 minuti.*

Soluzioni

1. (a) Posto $z = x + y\mathrm{i}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione $(*)$ diventa

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = -2(x - \mathrm{i}y)$$

ossia

$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 = -2x + 2y\mathrm{i}$$

ossia

$$x^2 - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}\,(xy - y) = 0$$

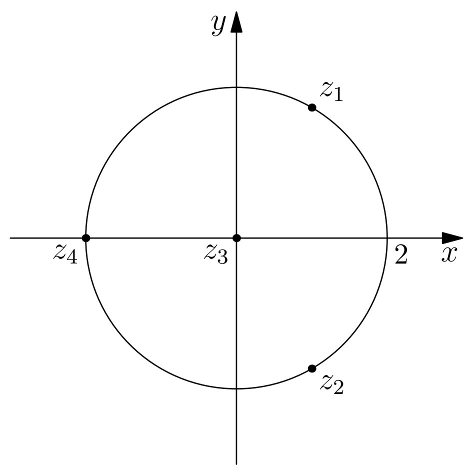
ossia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, si ha $x = 1$ oppure $y = 0$. Se $x = 1$, la prima equazione diventa $y^2 = 3$, da cui si ha $y = \pm\sqrt{3}$. Se $y = 0$, la prima equazione diventa $x^2 + 2x = 0$, da cui si ha $x = 0$ oppure $x = -2$. Pertanto, le soluzioni dell'equazione $(*)$ sono

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ z_2 &= 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right) \\ z_3 &= 0 \\ z_4 &= -2\,. \end{aligned}$$

Nel piano di Gauss, si ha



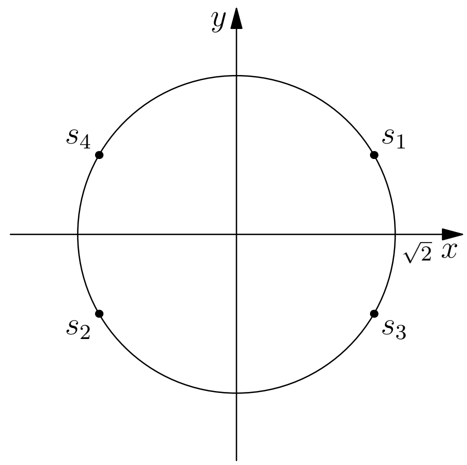
(b) Gli elementi dell'insieme S sono le radici quadrate di z_1 e di z_2 (le uniche due soluzioni dell'equazione $(*)$ con parte reale positiva). Le radici quadrate di z_1 sono

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Le radici quadrate di z_2 sono

$$\begin{aligned} s_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\,\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\,\pi\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_4 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Nel piano di Gauss, si ha



2. (a) Per $x \to 0$, si ha

$$1 - \sqrt{1+x^3} \sim -\frac{x^3}{2}, \qquad \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}, \qquad \sin(\operatorname{artg} 2x^2) \sim \operatorname{artg} 2x^2 \sim 2x^2 .$$

Quindi, per $x \to 0$, si ha

$$f(x) = \frac{\left(1-\sqrt{1+x^3}\right) \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\sin(\operatorname{artg} 2x^2)} \sim \frac{-\frac{x^3}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{8}\, x^2 .$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 .$$

(b) Per il risultato ottenuto nel punto precedente, il prolungamento F è la funzione definita, in un intorno di $x_0 = 0$, da

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 . \end{cases}$$

Il grafico della funzione F passa per il punto $(0,0)$. Inoltre, la funzione F è asintotica a $-\frac{1}{8}\, x^2$, per $x \to 0$. Questo significa che il grafico F, in un intorno di $x_0 = 0$, si comporta come una parabola che nell'origine ha retta tangente di equazione $y = 0$.

3. (a) La funzione data è definita su tutto $\mathbb{R}$ tranne che in $x = 1$. Si hanno i limiti

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0^+, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty .$$

Pertanto si ha un asintoto verticale sinistro per $x \to 1^-$. Inoltre, essendo

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{-1} \\ q &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} (x\mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}} - \mathrm{e}^{-1}x) = \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{e}^{-1}\, x \left(\mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}+1} - 1\right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{e}^{-1}\, x \left(\mathrm{e}^{-\frac{6}{x-1}} - 1\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{e}^{-1}\, x \left(-\frac{6}{x-1}\right) = -\frac{6}{\mathrm{e}} , \end{aligned}$$

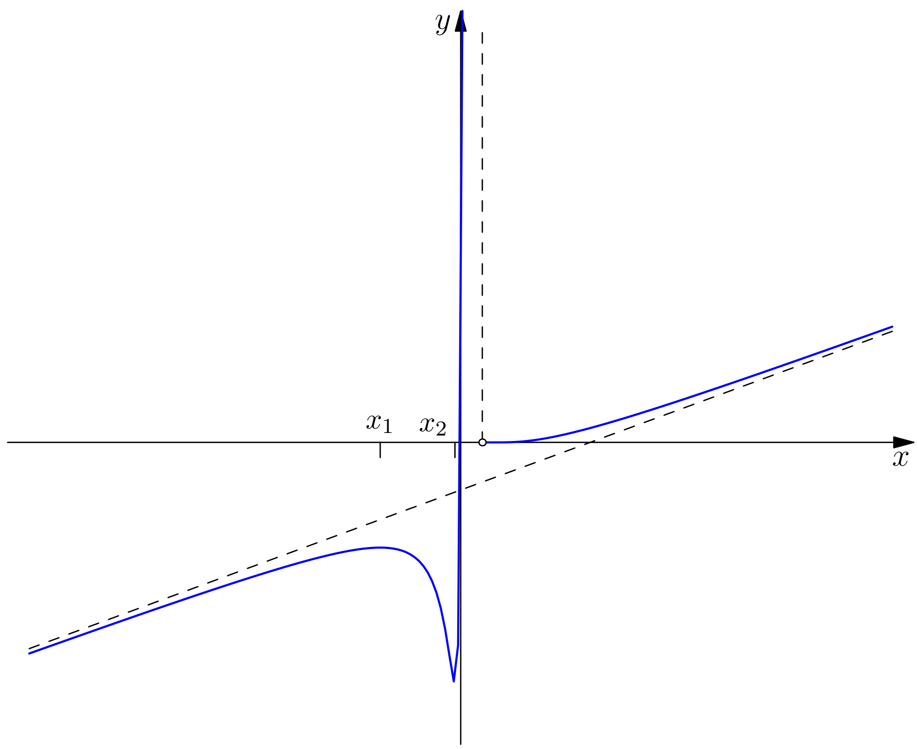
si ha l'asintoto obliquo di equazione $y = \frac{x-6}{\mathrm{e}}$ per $x \to \pm\infty$.

(b) La funzione f è derivabile su tutto il suo dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (essendo composta di funzioni derivabili), Inoltre, si ha

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}} + x\mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}} \left(-\frac{(x-1)-(x+5)}{(x-1)^2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}} \left(1 + \frac{6x}{(x-1)^2}\right) = \frac{x^2+4x+1}{(x-1)^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{x+5}{x-1}} .$$

(c) Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 4x + 1 = 0$, ossia solo nei punti $x_1 = -2 - \sqrt{3} < 0$ e $x_2 = -2 + \sqrt{3} < 0$. Inoltre, studiando il segno di $f'(x)$, si trova che la funzione f è crescente in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, 1) \cup (1, +\infty)$ ed è decrescente in (x_1, x_2). Pertanto, si ha un punto di massimo locale in x_1 e si ha un punto di minimo locale in x_2.

(d) Il grafico della funzione è



(e) Poiché è una funzione continua, f porta intervalli in intervalli. Quindi $f(I)$ è un intervallo. Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0^+ \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

si ha $f(I) = (0, +\infty)$.