Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Secondo compito in itinere – 30 Gennaio 2017**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

T.1: 5 punti	**T.2**: 3 punti	**Totale**	**Es.1**: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 10 punti	**Totale**

Prima Parte

1. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del Calcolo Integrale.
2. Dare le definizioni di curva parametrica regolare e di terna intrinseca, specificando cosa accade quando il vettore binormale è costante.

Seconda Parte

1. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, l'integrale improprio
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-x} + x - 1)^{1/6}}{x^\alpha \sqrt{1 + x^\alpha}} \, \mathrm{d}x$$
converge.
2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.
   (a) Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{t(t-1)} \\ y(2) = \ln \alpha \, . \end{cases}$$
   (b) Determinare il più ampio intervallo I_α di definizione della soluzione trovata nel punto precedente.
3. (a) Determinare i parametri direttori della retta
$$r : \begin{cases} x + 3y - 2z - 2 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \, . \end{cases}$$
   (b) Mostrare che la retta r interseca la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t - t^2 \\ z = 1 + t^2 - t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
   in un solo punto P.
   (c) Stabilire se la retta r è tangente alla curva γ.
   (d) Calcolare la curvatura di γ nel punto P.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *15 minuti.* Seconda parte: *90 minuti.*

Soluzioni

1. La funzione integranda

$$f(x) = \frac{(\mathrm{e}^{-x} + x - 1)^{1/6}}{x^\alpha \sqrt{1 + x^\alpha}}$$

è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Si tratta quindi di studiare l'integrabilità di f in un intorno destro di 0 e in un intorno di $+\infty$.

Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) = \frac{(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x - 1)^{1/6}}{x^\alpha \sqrt{1 + x^\alpha}} = \frac{(\frac{x^2}{2} + o(x^2))^{1/6}}{x^\alpha \sqrt{1 + x^\alpha}} \sim \frac{1}{2^{1/6}} \frac{x^{1/3}}{x^\alpha} = \frac{1}{2^{1/6}} \frac{1}{x^{\alpha - 1/3}}.$$

La funzione $1/x^{\alpha - 1/3}$ è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ quando $\alpha - \frac{1}{3} < 1$, ossia per $\alpha < 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Pertanto, applicando il criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$ per $\alpha < \frac{4}{3}$.

Per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{1/6}}{x^\alpha x^{\alpha/2}} = \frac{1}{x^{3\alpha/2 - 1/6}}.$$

La funzione $1/x^{3\alpha/2 - 1/6}$ è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ quando $\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{6} > 1$, ossia per $\alpha > \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{6}) = \frac{7}{9}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che anche la funzione f è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ per $\alpha > \frac{7}{9}$.

In conclusione, la funzione f è integrabile in senso improprio, e quindi l'integrale I è convergente, se e soltanto se

$$\frac{7}{9} < \alpha < \frac{4}{3}.$$

2. (a) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili del tipo $y' = a(t)b(y)$, dove

$$a(t) = \frac{1}{t(t-1)} \qquad \text{e} \qquad b(y) = \mathrm{e}^{-y}.$$

Poiché la funzione a è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e la funzione b è di classe $\mathscr{C}^1$ su $\mathbb{R}$, il teorema di esistenza e unicità locale garantisce l'esistenza di un intervallo $I_\delta = (2 - \delta, 2 + \delta)$ e di un'unica funzione $\varphi : I_\delta \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$ che è soluzione del problema di Cauchy assegnato. Poiché non ci sono soluzioni singolari, possiamo separare le variabili

$$\mathrm{e}^y\, y' = \frac{1}{t(t-1)}$$

da cui si ricava

$$\int \mathrm{e}^y\, \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) \mathrm{d}t$$

ossia

$$\mathrm{e}^y = -\ln|t| + \ln|t-1| + c = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + c$$

dove c è un'arbitraria costante reale. Poiché $x_0 = 2$, siamo sull'intervallo $(1, +\infty)$ e quindi possiamo togliere il modulo. Quindi l'integrale generale è

$$y(t) = \ln\left(\ln\frac{t-1}{t} + c \right).$$

Imponendo la condizione iniziale $y(2) = \ln\alpha$, si ha

$$\ln\alpha = \ln\left(\ln\frac{1}{2} + c \right) = \ln(-\ln 2 + c)$$

da cui si ha $\alpha = -\ln 2 + c$, ossia $c = \ln 2 + \alpha$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$\varphi(t) = \ln\Big(\ln\frac{2(t-1)}{t} + \alpha\Big).$$

(b) Per determinare il più ampio intervallo di definizione di φ osserviamo che si dovrà avere $t > 1$ (per l'esistenza di a) e inoltre

$$\begin{aligned}
\alpha + \ln\frac{2(t-1)}{t} > 0 \quad &\iff \quad \ln\frac{2(t-1)}{t} > -\alpha \\
&\iff \quad 2\Big(1-\frac{1}{t}\Big) > \mathrm{e}^{-\alpha} \\
&\iff \quad \frac{1}{t} < 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2} \\
&\iff \quad t > \frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2}} = \frac{2}{2-\mathrm{e}^{-\alpha}}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto avremo

$$I_\alpha = \Big(\frac{2}{2-\mathrm{e}^{-\alpha}}, +\infty\Big).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che rappresenta γ, ossia la funzione definita da

$$f(t) = (t, 1+t-t^2, 1+t^2-t^3)\,.$$

(a) I parametri direttori di r sono

$$\left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (1 : -1 : -1)\,.$$

(b) I punti di intersezione tra r e γ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t + 3(1+t-t^2) - 2(1+t^2-t^3) - 2 = 0 \\ t + 2(1+t-t^2) - (1+t^2-t^3) - 2 = 0\,. \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1 = 0 \\ t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione, si ha $(t-1)^3 = 0$ e quindi $t = 1$. Si verifica facilmente che $t = 1$ è una radice anche della prima equazione. Quindi, l'unico punto di intersezione tra r e γ è

$$P \equiv f(1) = (1,1,1)\,.$$

Osservazione. Si può anche procedere nel modo seguente. Poiché $Q \equiv (2,0,0)$ è un punto di r, si ha

$$r : \begin{cases} x = 2 + u \\ y = -u \\ z = -u\,. \end{cases}$$

Pertanto, intersecando r con γ, si ha il sistema

$$\begin{cases} 2 + u = t \\ -u = 1 + t - t^2 \\ -u = 1 + t^2 - t^3 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} u = t - 2 \\ 2 - t = 1 + t - t^2 \\ 2 - t = 1 + t^2 - t^3 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} u = t - 2 \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \\ t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ha l'unica soluzione $t = 1$ e $u = -1$. Si ritrova così che $r \cap \gamma = P$.

(c) Se la retta r è tangente alla curva γ, lo è necessariamente nell'unico punto P di intersezione tra r e γ. Calcoliamo i parametri direttori della retta r' tangente a γ in P. Poiché

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 - 2t \\ z' = 2t - 3t^2 \,, \end{cases}$$

i parametri direttori di r' sono $(x'(1) : y'(1) : z'(1)) = (1 : -1 : -1)$. Pertanto, passando per lo stesso punto P e avendo gli stessi parametri direttori, le due rette r ed r' coincidono. In conclusione, la retta r è tangente a γ in P.

(d) Poiché $f'(t) = (1, 1-2t, 2t-3t^2)$, si ha $f''(t) = (0, -2, 2-6t)$. Pertanto $f'(1) = (1, -1, -1)$, $f''(1) = (0, -2, -4)$ e

$$f'(1) \wedge f''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (2, 4, -2)\,.$$

Infine, essendo $\|f'(1)\| = \sqrt{3}$ e $\|f'(1) \wedge f''(1)\| = 2\sqrt{6}$, la curvatura di γ in P è

$$\kappa(1) = \frac{\|f'(1) \wedge f''(1)\|}{\|f'(1)\|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$