Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo compito in itinere – 31 Gennaio 2017**

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Compito A

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 10 punti	**Totale**

1. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+x}}{x^{2\alpha}\sqrt[3]{1+2x+x^2}}\, \mathrm{d}x$$

converge.

2. (a) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 5y + \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-5t})^2}\,.$$

(b) Dire se esiste una soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.

3. (a) Determinare il piano osculatore π_0 alla curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = 2 + t - \mathrm{e}^t \\ z = 1 + t\mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto P_0 corrispondente a $t = 0$.

(b) Determinare il versore normale di γ nel punto P_0.

(c) Calcolare la curvatura e il raggio di curvatura di γ nel punto P_0.

(d) Determinare il centro di curvatura di γ nel punto P_0.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *15 minuti.* Seconda parte: *90 minuti.*

Soluzioni

1. Poiché

$$\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+x}=\frac{1+4x-1-x}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+x}}=\frac{3x}{\sqrt{1+4x}+\sqrt{1+x}}\,,$$

la funzione integranda

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+x}}{x^{2\alpha}\sqrt[3]{1+2x+x^2}}$$

è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$. Si tratta quindi di studiare l'integrabilità di f in un intorno destro di 0 e in un intorno di $+\infty$.

Per $x\to 0^+$, si ha

$$f(x)\sim\frac{3x}{2x^{2\alpha}}=\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^{2\alpha-1}}\,.$$

La funzione $1/x^{2\alpha-1}$ è integrabile in senso improprio per $x\to 0^+$ quando $2\alpha-1<1$, ossia per $\alpha<1$. Pertanto, applicando il criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio per $x\to 0^+$ per $\alpha<1$.

Per $x\to+\infty$, si ha

$$f(x)\sim\frac{3x}{3\sqrt{x}\,x^{2\alpha}\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{x^{2\alpha+2/3-1/2}}=\frac{1}{x^{2\alpha+1/6}}\,.$$

La funzione $1/x^{2\alpha+1/6}$ è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ quando $2\alpha+\frac{1}{6}>1$, ossia per $\alpha>\frac{1}{2}(1-\frac{1}{6})=\frac{5}{12}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che anche la funzione f è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ per $\alpha>\frac{5}{12}$.

In conclusione, la funzione f è integrabile in senso improprio, e quindi l'integrale I è convergente, se e soltanto se

$$\frac{5}{12}<\alpha<1\,.$$

2. (a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non-omogenea con coefficienti continui definiti su tutto $\mathbb{R}$. Pertanto tutte le sue soluzioni saranno definite su tutto $\mathbb{R}$. L'integrale generale è dato da

$$y(t)=\mathrm{e}^{\int 5\ \mathrm{d}t}\left[\int\frac{\mathrm{e}^{-\int 5\ \mathrm{d}t}}{(1+\mathrm{e}^{-5t})^2}\ \mathrm{d}t+c\right]=\mathrm{e}^{5t}\left(\int\frac{\mathrm{e}^{-5t}}{(1+\mathrm{e}^{-5t})^2}\ \mathrm{d}t+c\right)=\frac{1}{5}\,\frac{\mathrm{e}^{5t}}{1+\mathrm{e}^{-5t}}+c\,\mathrm{e}^{5t}$$

dove $c\in\mathbb{R}$.

(b) Sia

$$\varphi_c(t)=\frac{1}{5}\,\frac{\mathrm{e}^{5t}}{1+\mathrm{e}^{-5t}}+c\,\mathrm{e}^{5t}\,.$$

Per ogni $c\in\mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi_c(t)=0\,.$$

Inoltre, se $c\neq-\frac{1}{5}$, si ha

$$\varphi_c(t)\sim\left(c+\frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{5t}\to\operatorname{sign}\left(c+\frac{1}{5}\right)\infty\qquad\text{per } t\to+\infty\,.$$

Se invece $c=-\frac{1}{5}$, allora

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_{-1/5}(t)=-\frac{1}{5}\,.$$

Pertanto esiste una sola soluzione limitata su tutto $\mathbb{R}$, data da $\varphi_{-1/5}$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che rappresenta γ, ossia la funzione definita da

$$f(t) = (\mathrm{e}^t, 2 + t - \mathrm{e}^t, 1 + t\mathrm{e}^t)\,.$$

Si ha $f'(t) = (\mathrm{e}^t, 1 - \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t)$ e $f''(t) = (\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^t, 2\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t)$.

(a) Per $t = 0$, si ha $P_0 = f(0) = (1, 1, 1)$, $f'(0) = (1, 0, 1)$ e $f''(0) = (1, -1, 2)$. Pertanto, l'equazione del piano osculatore π_0 è $[X - P_0, f'(0), f''(0)] = 0$, dove $X \equiv (x, y, z)$ ossia

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & x-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\pi_0 \ : \ x - y - z + 1 = 0\,.$$

(b) Il versore tangente in P_0 è

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Inoltre, essendo $f'(0) \wedge f''(0) = (1, -1, -1)$, il versore binormale in P_0 è

$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(1, -1, -1)}{\sqrt{3}}\,.$$

Infine, versore normale in P_0 è

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(-1, -2, 1)}{\sqrt{6}}\,.$$

(c) La curvatura e il raggio di curvatura di γ nel punto P_0 sono

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

e

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,.$$

(d) Il centro di curvatura di γ nel punto P_0 è

$$C_0 = P_0 + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (1, 1, 1) + \frac{2}{3}\,(-1, -2, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$