Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo Appello – 13 Febbraio 2017**

Cognome: ____________________ **Compito A**

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

T.1: 5 punti	**T.2**: 3 punti	**Totale**	**Es.1**: 5 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

Prima Parte

1. Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per successioni.
2. Dare la definizione di prodotto vettoriale e di norma per vettori di $\mathbb{R}^3$ e scrivere l'uguaglianza di Lagrange.

Seconda Parte

1. Calcolare il limite
$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 - \sin^2 x}{\cos 3x - 1}.$$
2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = \frac{e^{-4x^2+2x}}{x-1}$$
per ogni $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
   (a) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f.
   (b) Disegnare un grafico qualitativo di f.
   (c) Scrivere il polinomio di Taylor di f, centrato in $x_0 = 0$, di ordine 2.
   (d) Stabilire se l'integrale generalizzato
$$I = \int_2^{+\infty} f(x)\, dx$$
è convergente o divergente.
3. (a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' = 2y - y^2$$
   (b) Sia $\overline{y}$ la soluzione particolare che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 1$. Calcolare le derivate $\overline{y}\,'(0)$, $\overline{y}\,''(0)$, $\overline{y}\,'''(0)$. (Non si richiede di trovare esplicitamente la soluzione $\overline{y}$). Stabilire se $x_0 = 0$ è, per $\overline{y}$, un punto di estremo relativo, un punto di flesso, o né l'uno né l'altro.
4. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t^2 + t \\ z = t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta tangente a γ nel punto $P \equiv (0, 2, 1)$ e che passa per il punto $Q \equiv (1, 0, 1)$.
   (b) Trovare un'equazione del piano osculatore a γ nel punto $P \equiv (0, 2, 1)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *15 minuti.* Seconda parte: *120 minuti.*

Soluzioni

1. Per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + o(x^2) \\ \sin^2 x &= (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2) \\ \cos 3x &= 1 - \frac{9}{2}\, x^2 + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

   Pertanto, per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} e^{-x^2} - 1 - \sin^2 x &= 1 - x^2 + o(x^2) - 1 - x^2 + o(x^2) = -2x^2 + o(x^2) \\ \cos 3x - 1 &= 1 - \frac{9}{2}\, x^2 + o(x^2) - 1 = -\frac{9}{2}\, x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

   e

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}\, x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2 + o(1)}{-\frac{9}{2} + o(1)} = \frac{4}{9}\,.$$

2. (a) La funzione f è derivabile in ogni punto del suo dominio, l'insieme aperto $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Quindi gli eventuali punti di massimo o di minimo locali vanno ricercati tra i punti in cui la derivata prima di f si annulla. Gli zeri della derivata

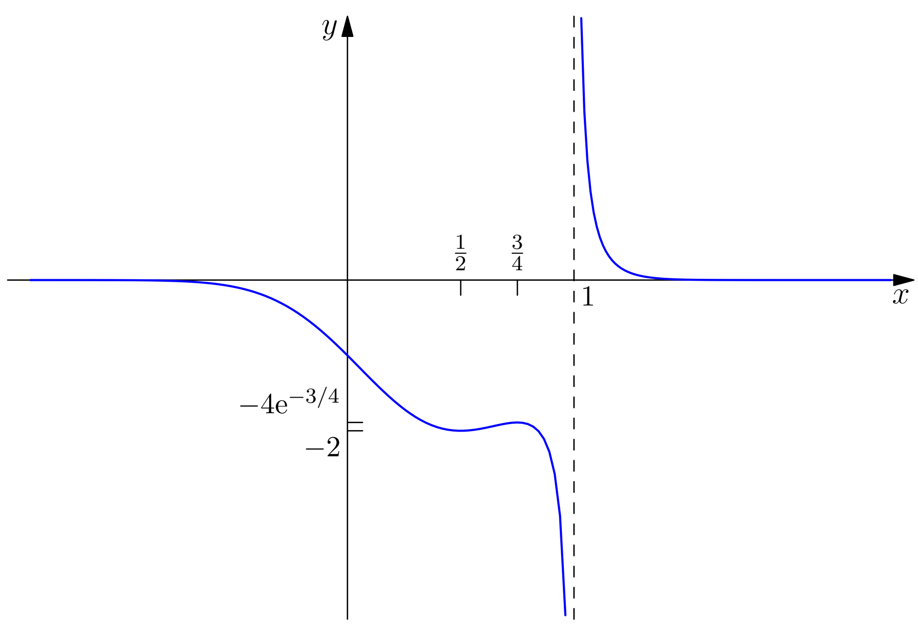
$$f'(x) = \frac{-8x^2 + 10x - 3}{(x-1)^2}\, e^{-4x^2+2x}$$

   sono gli zeri del polinomio $8x^2 - 10x + 3$, ossia $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/4$. Si ha $f'(x) < 0$ per $x < 1/2$, $f'(x) > 0$ per $1/2 < x < 3/4$, $f'(x) < 0$ per $3/4 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $1 < x$. Dunque, $x_1 = 1/2$ è un punto di minimo locale, mentre $x_2 = 3/4$ è un punto di massimo locale.

   (b) La funzione f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$. Non ci sono asintoti obliqui. La retta di equazione $x = 1$ è (l'unico) asintoto verticale. Infatti,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\,.$$

   Il grafico di f è



   (c) Per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= -\frac{1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + o(x^2)) = -1 - x - x^2 + o(x^2) \\ e^{-4x^2+2x} &= 1 + (-4x^2 + 2x) + \frac{1}{2}\,(-4x^2 + 2x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

Quindi, per $x \to 0$, si ha

$$f(x) = \frac{e^{-4x^2+2x}}{x-1} = \left(-1 - x - x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)\right) = -1 - 3x - x^2 + o(x^2)\,.$$

Pertanto, il polinomio di Taylor di f, centrato in $x_0 = 0$, di ordine 2 è $-1 - 3x - x^2$.

(d) Per il confronto tra infiniti, si ha

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{4x^2-2x}} < \frac{1}{x}$$

per tutti gli x sufficientemente grandi. Dunque, per $x \to +\infty$, si ha

$$0 < f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-4x^2+2x}}{x-1} \sim \frac{1}{x\mathrm{e}^{4x^2-2x}} < \frac{1}{x^2}\,.$$

Quindi, per i criteri del confronto e del confronto asintotico, l'integrale I è convergente.

3. (a) Si tratta di una equazione a variabili separabili. Le soluzioni singolari sono $y(x) = 0$ e $y(x) = 2$. Le altre soluzioni si ottengono separando le variabili, ossia dall'equazione

$$\int \frac{1}{2y - y^2}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x\,.$$

Poiché

$$\int \frac{1}{2y-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-2}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y-2|\right),$$

l'equazione precedente diventa

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y-2}\right| = x + c$$

ossia

$$\left|\frac{y}{y-2}\right| = \mathrm{e}^{2c}\cdot\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Poiché, al variare del parametro reale c, il termine e^{2c} prende tutti e soli i valori reali positivi, si ha l'equazione

$$\frac{y}{y-2} = k\mathrm{e}^{2x}\,,$$

con k numero reale diverso da zero. Ricavando la y da quest'ultima equazione si ottiene

$$y(x) = \frac{2k\mathrm{e}^{2x}}{k\mathrm{e}^{2x} - 1} \qquad k \neq 0\,. \tag{1}$$

Si ha $y(x) \to 2$ per $x \to +\infty$ e $y(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, per ogni $k \neq 0$.

(b) Dall'equazione differenziale di partenza si ha

$$\begin{aligned}
&\overline{y}'(x) = 2\overline{y}(x) - \overline{y}(x)^2\\
&\overline{y}''(x) = 2\overline{y}'(x) - 2\overline{y}(x)\overline{y}'(x)\\
&\overline{y}'''(x) = 2\overline{y}''(x) - 2\overline{y}'(x)^2 - 2\overline{y}(x)\overline{y}''(x)\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, dalla condizione iniziale $\overline{y}(0) = 1$, si ha

$$\begin{aligned}
&\overline{y}'(0) = 2\overline{y}(0) - \overline{y}(0)^2 = 2 - 1 = 1\\
&\overline{y}''(0) = 2\overline{y}'(0) - 2\overline{y}(0)\overline{y}'(0) = 2 - 2 = 0\\
&\overline{y}'''(0) = 2\overline{y}''(0) - 2\overline{y}'(0)^2 - 2\overline{y}(0)\overline{y}''(0) = 0 - 2 - 0 = -2\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio MacLaurin di $\overline{y}$ di ordine 3 è

$$1 + x - \frac{1}{3}x^3\,.$$

La soluzione $\overline{y}$ ha in $x_0 = 0$ un punto di flesso.

Osservazione. Dalla formula che dá l'integrale generale, imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ottiene $k = -1$. Dunque, la soluzione $\overline{y}$ che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 1$ è data da

$$\overline{y}(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1},$$

che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

4. (a) Il punto P corrisponde al valore $t = 1$ del parametro. Poniamo $f(t) = (1 - t, t^2 + t, t^3)$ e indichiamo con r la tangente alla curva γ nel punto P. Poiché $f'(t) = (-1, 2t + 1, 3t^2)$, si ha $f'(1) = (-1, 3, 3)$ e quindi

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 3t\,. \end{cases}$$

Ricavando t dalla prima equazione ($t = -x$) e sostituendolo nelle altre due, si ottengono le equazioni cartesiane della retta r, ossia

$$r : \begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Il piano π cercato appartiene al fascio Φ di piani che ha r come sostegno e che ha equazione

$$\lambda(3x + y - 2) + \mu(3x + z - 1) = 0\,.$$

Imponendo il passaggio per il punto $Q \equiv (1, 0, 1)$ si ottiene $\lambda + 3\mu = 0$. Scelto $\lambda = 3$ e $\mu = -1$, si ha

$$\pi \; : \; 3(3x + y - 2) - (3x + z - 1) = 0$$

ossia $\pi \; : \; 6x + 3y - z - 5 = 0$.

(b) Poiché $f'(t) = (-1, 2t + 1, 3t^2)$, si ha $f''(t) = (0, 2, 6t)$. Quindi $f'(1) = (-1, 3, 3)$, $f''(1) = (0, 2, 6)$ e $f'(1) \wedge f''(1) = (12, 6, -2) = 2(6, 3, -1)$. Il vettore $(6, 3, -1)$ è quindi ortogonale al piano osculatore a γ in P, che pertanto è rappresentato dall'equazione $12x + 6(y-2) - 2(z-1) = 0$, equivalente a $6x + 3y - z - 5 = 0$.

Equivalentemente, l'equazione del piano osculatore cercato è $[\mathbf{x} - f(1), f'(1), f''(1)] = 0$, ossia

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z - 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

ossia $12x + 6(y - 2) - 2(z - 1) = 0$, ossia $6x + 3y - z - 5 = 0$.