Analisi e Geometria 1 **Primo Appello – 14 Febbraio 2017**

Cognome: ____________________ **Compito A**

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

1. Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{\ln(1+3x) - 3\sin x}\,.$$

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = (4x+3)\,e^{\frac{1}{x}}$$
per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
   (a) Trovare gli asintoti di f.
   (b) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f.
   (c) Disegnare il grafico qualitativo di f.
   (d) Stabilire se l'integrale generalizzato
   $$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$
   è convergente o divergente.

3. (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
   $$y' + x^2 y = x^2\,.$$
   (b) Sia $\overline{y}$ la soluzione particolare che soddisfa la condizione $\overline{y}(0) = 2$. Scrivere il polinomio di Maclaurin di $\overline{y}$ di ordine 3. (Non si richiede di trovare esplicitamente la soluzione $\overline{y}$).
   (c) Trovare tutte le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale data che hanno un punto di flesso in $x_0 = 0$.

4. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t \\ z = 1 + t - 2t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$
   (a) Verificare che la curva γ è piana e determinare l'equazione cartesiana del piano π che la contiene.
   (b) Determinare l'equazione del piano rettificante della curva γ nel punto $P \equiv (1,1,0)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *120 minuti.*

Soluzioni

1. Per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \qquad \cos 2x = 1 - 2x^2 + o(x^2)$$
$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \sin x = x + o(x^2)\,.$$

Pertanto, per $x \to 0$, si ha

$$e^{x^2} - \cos 2x = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 + 2x^2 + o(x^2) = 3x^2 + o(x^2)$$
$$\ln(1+3x) - 3\sin x = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) - 3x + o(x^2) = -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$

e

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + o(1)}{-\frac{9}{2} + o(1)} = -\frac{2}{3}\,.$$

2. (a) Poiché si hanno i limiti

$$\lim_{x\to -\infty} (4x+3)\,e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} (4x+3)\,e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} (4x+3)\,e^{\frac{1}{x}} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} (4x+3)\,e^{\frac{1}{x}} = +\infty\,,$$

la funzione f non ha asintoti orizzontali e ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$. Si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+3}{x}\,e^{\frac{1}{x}} = 4\,.$$

Per $x \to \pm\infty$ si ha che $\frac{1}{x} \to 0$ e quindi si ha lo sviluppo $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. Di conseguenza, si ha

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left((4x+3)e^{\frac{1}{x}} - 4x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left((4x+3)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 4x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(4x + 4 + o(1) + 3 + \frac{3}{x} + +o\left(\frac{1}{x}\right) - 4x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} (7 + o(1)) \\ &= 7\,. \end{aligned}$$

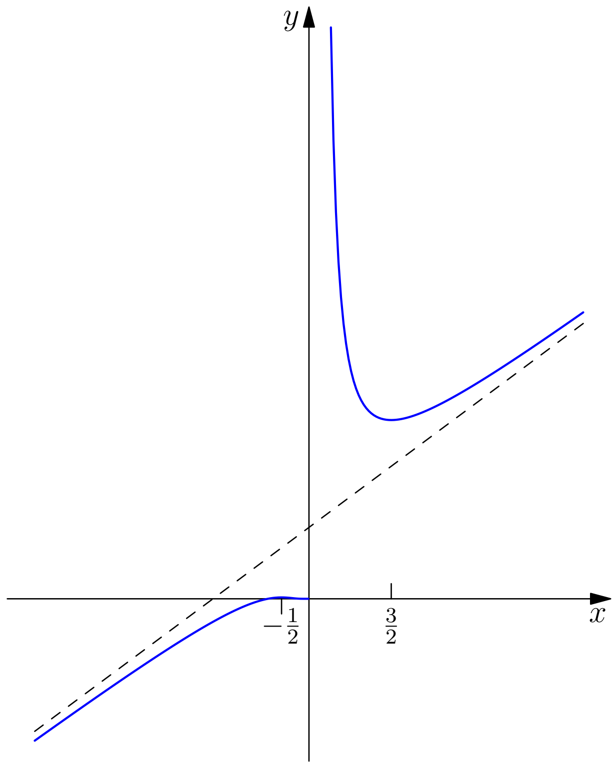
Dunque, f possiede la retta di equazione $y = 4x + 7$ come asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

(b) La derivata prima

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$$

si annulla per $4x^2 - 4x - 3 = 0$, ossia in $x_1 = -\frac{1}{2}$ e in $x_2 = \frac{3}{2}$. Dallo studio del segno di f' (che coincide con il segno di $4x^2 - 4x - 3$), si deduce che $x_1 = -\frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale e che $x_2 = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo locale.

(c) Il grafico di f è



(d) La funzione f è continua e positiva su tutto l'intervallo $(0,1)$ ed è illimitata per $x \to 0^+$. Si tratta quindi di studiare l'integrabilità di f in un intorno destro di 0. Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) = (4x+3)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sim 3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 3\,(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})\frac{1}{x} > 3\frac{1}{x}$$

definitivamente, poiché $x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 1$ definitivamente (essendo $x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ per $x \to 0^+$). Quindi, per i criteri del confronto e del confronto asintotico, l'integrale I è divergente.

3. (a) La soluzione generale dell'equazione differenziale lineare data è

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int x^2\,\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int x^2\,\mathrm{d}x} x^2\,\mathrm{d}x + c\right] = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}\left[\int x^2\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\,\mathrm{d}x + c\right] = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} + c\right) = 1 + c\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$$

dove c è un'arbitraria costante reale. Vi è un'unica soluzione costante, $y_0(x) = 1$, che si ottiene per $c = 0$.

(b) *Primo modo.* Tenendo conto del fatto che $\overline{y}$ soddisfa l'equazione differenziale data e che $\overline{y}(0) = 2$, si ha

$$\begin{aligned} &\overline{y}'(x) = x^2 - x^2\overline{y}(x) && \overline{y}'(0) = 0 \\ &\overline{y}''(x) = 2x - 2x\overline{y}(x) - x^2\overline{y}'(x) && \overline{y}''(0) = 0 \\ &\overline{y}'''(x) = 2 - 2\overline{y}(x) - 4x\overline{y}'(x) - x^2\overline{y}''(x) && \overline{y}'''(0) = -4 + 2 = -2\,. \end{aligned}$$

Pertanto, il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $\overline{y}$ è $T_3(x) = 2 - \frac{x^3}{3}$.

Secondo modo. Dall'espressione della soluzione generale si ha che la soluzione particolare $\overline{y}$ è data da

$$\overline{y}(x) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}\,.$$

Per $x \to 0$, si ha

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

e quindi

$$1 + \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} = 2 - \frac{x^3}{3} + 0(x^3)\,.$$

Di conseguenza, il polinomio di Maclaurin di ordine tre di $\overline{y}$ è $T_3(x) = 2 - \frac{x^3}{3}$.

(c) Dall'espressione della soluzione generale si ha che lo sviluppo di Maclaurin di ordine tre di una soluzione non costante ($c \neq 0$) è

$$y_c(x) = 1 + c\,\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}} = (1+c) - \frac{c}{3}\,x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

Quindi, per ogni soluzione non costante y_c ($c \neq 0$) ha in $x_0 = 0$ un punto di flesso, essendo $y_c''(0) = 0$ e $y_c'''(0) \neq 0$. Poiché $y_c'(0) = 0$, sono tutti flessi a tangente orizzontale.

4. (a) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$). La condizione necessaria e sufficiente affinché il piano contenga la curva γ è che risulti

$$at^3 + bt + c(1 + t - 2t^3) + d = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

ossia che risulti

$$(a - 2c)t^3 + (b + c)t + c + d = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Questo si verifica se e solo se il polinomio precedente nell'indeterminata t è il polinomio nullo, ossia se e solo se $a = 2c$, $b = -c$ e $d = -c$. Scelto ad esempio $c = 1$, si ha la soluzione $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$ che corrisponde al piano di equazione $2x - y + z - 1 = 0$. Tale piano contiene la curva γ e coincide con il piano osculatore a γ in un suo qualsiasi punto.

(b) Il punto $P \equiv (1, 1, 0)$ corrisponde al valore $t = 1$ del parametro. Posto $f(t) = (t^3, t, 1+t-2t^3)$, si ha $f'(t) = (3t^2, 1, 1-6t)$ e $f'(1) = (3, 1, -5)$. La tangente a γ in P ha quindi la direzione del vettore $\mathbf{v} = (3, 1, -5)$. Il piano rettificante della curva γ nel punto P è parallelo sia al vettore $\mathbf{v} = (3, 1, -5)$ sia al vettore $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ (ortogonale al piano osculatore trovato nel punto precedente). Quindi un vettore ortogonale al piano rettificante in P è $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (-4, -13, -5)$ e l'equazione del piano rettificante in P è quindi $-4(x-1) - 13(y-1) - 5z = 0$, ossia $4x + 13y + 5z - 17 = 0$.

Soluzione alternativa: nel fascio di piani che hanno come sostegno la retta tangenta a γ in P, si cerca quello ortogonale al piano osculatore $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$.