Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Secondo Appello – 5 Luglio 2017**

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________

Matricola: ______________________

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

1. Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità della funzione f definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^\alpha} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
in $x = 0$.

2. (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π parallelo alla retta
$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$
e passante per i punti $A \equiv (0,0,0)$ e $B \equiv (1,1,1)$.
   (b) Determinare i punti giacenti sulla retta r e distanti 1 dal punto A.

3. (a) Determinare la soluzione y_β del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -x^6 y^2 \\ y(0) = \beta \end{cases}$$
al variare del parametro reale β, specificando qual è il suo più grande intervallo di definizione I_β.
   (b) Stabilire se l'integrale $\int_{I_\beta} y_\beta(x)\,dx$ esiste finito o meno al variare di β.

4. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}{|x|}.$$
   (a) Determinare il dominio di f.
   (b) Determinare il segno di f.
   (c) Determinare i massimi e i minimi di f, specificando se si tratta di estremanti locali o assoluti.
   (d) Determinare l'andamento asintotico di f per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
   (e) Disegnare, con le informazioni ricavate nei punti precedenti, un grafico qualitativo di f. Dal disegno ottenuto mostrare, senza fare calcoli, che la funzione presenta almeno un punto di flesso tra $-\infty$ e il primo estremante (quello con la coordinata x minima).

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin della funzione esponenziale e del coseno, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}-\cos x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{4-\alpha}}{12}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<4\\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha=4\\ \nexists & \text{se } \alpha>4\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Quindi la funzione è continua per $\alpha < 4$.

2. (a) Primo modo. I parametri direttori di r sono

$$\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} : -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(0:2:-2)=(0:1:-1)\,.$$

Pertanto $\mathbf{v}=(0,1,-1)$ è un vettore direttore di r. Consideriamo poi il vettore $\mathbf{w}=B-A=(1,1,1)$. Il piano cercato ha direzione ortogonale data dal vettore

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2,-1,-1)\,.$$

Pertanto, il piano π è il piano che passa per A e che ha $(2,-1,-1)$ come vettore ortogonale. Quindi $\pi\ :\ 2x-y-z=0$.
Secondo modo. La retta passante per i due punti A e B ha equazioni

$$\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}\qquad \text{ossia}\qquad \begin{cases}x=y\\ x=z\,.\end{cases}$$

Pertanto, il fascio di piani che ha AB come sostegno è

$$\Phi\ :\ \lambda(x-y)+\mu(x-z)=0$$

ossia

$$\Phi\ :\ (\lambda+\mu)x-\lambda y-\mu z=0\,.$$

I parametri direttori di r sono $(0:1:-1)$. Quindi, imponendo il parallelismo tra π e r, si ha $0\cdot(\lambda+\mu)-1\cdot\lambda+1\cdot\mu=0$, ossia $\lambda=\mu$. Pertanto $\pi\ :\ 2x-y-z=0$.

(b) Eliminando il parametro t dalle equazioni cartesiane, si ha

$$r:\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}-t\\ z=t\,.\end{cases}$$

La distanza tra un punto $P\equiv(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-t,t)\in r$ dal punto $A\equiv(0,0,0)$ è 1 se e solo se

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+t^2}=1$$

ossia se e solo se $2t^2-2t-1=0$. Si hanno così i due valori

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

e i corrispondenti punti

$$P_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right).$$

3. (a) L'equazione differenziale data è a variabili separabili, con $a(x) = -x^6$ (funzione continua su tutto $\mathbb{R}$) e $b(y) = y^2$ (funzione continua e derivabile con continutà su tutto $\mathbb{R}$). Pertanto, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy dato ha un'unica soluzione definita in un intervallo contenente $x = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

   Nel caso $\beta = 0$ è facile vedere che la soluzione è $y_0(x) = 0$ (la soluzione singolare). Supponiamo ora $\beta \neq 0$ e determiniamo la corrispondente soluzione del problema di Cauchy. Si noti che tale soluzione non si può annullare in un intorno di $x = 0$ per continuità. Separando le variabili, si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2 \int x^6 \,\mathrm{d}x$$

   da cui si ottiene

$$-\frac{1}{y} = -\frac{2}{7}\,x^7 - c$$

   ossia

$$y(x) = \frac{1}{\frac{2}{7}\,x^7 + c}\,.$$

   Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \beta$, si ottiene $\beta = 1/c$, ossia $c = 1/\beta$. Quindi, si ha

$$y_\beta(x) = \frac{1}{\frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{\beta}}\,.$$

   Questa funzione esiste per

$$\frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{\beta} \neq 0$$

   ovvero per

$$x \neq x_0 = \sqrt[7]{-\frac{7}{2\beta}}\,.$$

   In conclusione, essendo $x_0 < \beta$ per $\beta > 0$ e $x_0 > \beta$ per $\beta < 0$, abbiamo i seguenti tre casi:

$$I_\beta = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{per } \beta = 0 \\ (x_0, +\infty) & \text{per } \beta > 0 \\ (-\infty, x_0) & \text{per } \beta < 0\,. \end{cases}$$

   (b) Nel caso $\beta = 0$ la soluzione è banalmente integrabile su $\mathbb{R}$ e l'integrale vale 0. Se invece $\beta \neq 0$, allora y_β non è integrabile in un intorno sinistro (se $\beta > 0$) o destro (se $\beta < 0$) di x_0. Infatti, posto $g(x) = \frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{\beta}$, usando la formula di Taylor centrata in x_0, si ha

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0) = 2x_0^6\,(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0\,.$$

   Di conseguenza, per $x \to x_0$, si ha

$$y_\beta(x) = \frac{1}{g(x)} \sim \frac{1}{2x_0^6}\,\frac{1}{x - x_0}\,.$$

   Pertanto l'integrale improprio $\int_{I_\beta} y_\beta(x)\,\mathrm{d}x$ non converge a un valore finito se $\beta \neq 0$.

4. (a) Per l'esistenza della funzione, si deve avere $x \neq 0$ e $x^2 - 5x - 6 \geq 0$, ossia $x \leq -1$ e $x \geq 6$. Pertanto il dominio di f è $D = (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$.

(b) Segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$. In particolare, essendo $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 6$, $(-1, 0)$ e $(6, 0)$ sono punti di minimo assoluto.

(c) La derivata di f, per $x \neq -1, 6$, è

$$f'(x) = \operatorname{sign}(x) \frac{5x + 12}{2x^2 \sqrt{x^2 - 5x - 6}}.$$

Pertanto, f' si annulla in $x = -\frac{12}{5}$ ed è positiva per $x < -\frac{12}{5}$ e $x > 6$. Di conseguenza, il punto $\left(-\frac{12}{5}, \frac{7}{2\sqrt{6}}\right)$ è un massimo locale, mentre i punti $(-1, 0)$ e $(6, 0)$ sono minimi assoluti.

Si osservi che

$$\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 6^+} f'(x) = +\infty.$$

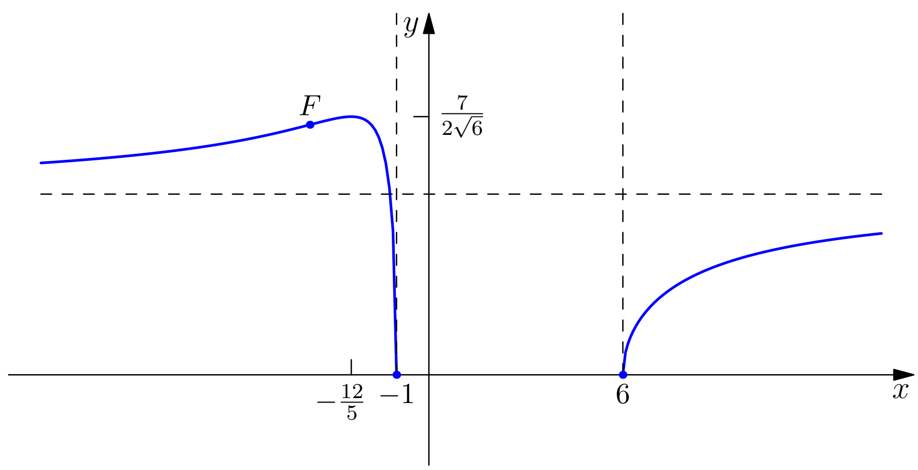
Di conseguenza, la funzione f ha tangente verticale per $x = -1$ e per $x = 6$.

(d) Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{|x|} = 1,$$

la funzione f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

(e) Il grafico della funzione è



In un intorno del massimo, la concavità della funzione è rivolta verso il basso. Poiché il grafico della funzione interseca l'asintoto orizzontale solo per $x = -\frac{6}{5}$, la concavità della funzione per $x \to -\infty$ è rivolta verso l'alto. Si ha quindi un cambiamento di concavità in un punto dove la funzione è derivabile. Di conseguenza si ha almeno un punto di flesso.

Si osservi, infine, che il punto di massimo è in realtà un punto di massimo assoluto.