Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Terzo Appello – 4 Settembre 2017**

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________

Matricola: ______________________

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

1. (a) Disegnare sul piano di Gauss gli insiemi

$$A = \Big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z + 1 - \mathrm{i}| = |z| \Big\}$$
$$B = \Big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0 \Big\} .$$

(b) Tenendo conto del punto precedente, risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z + 1 - \mathrm{i}| = |z| \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0 . \end{cases}$$

(c) Detta z_0 la soluzione del sistema precedente, determinare

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} + z_0 \qquad \text{e} \qquad z_2 = (1 + \mathrm{i}) z_0 .$$

Disegnare sul piano di Gauss i punti z_1 e z_2 .

2. Calcolare, per $\alpha = \frac{1}{4}$, per $\alpha = 1$ e per $\alpha = 2$, il limite

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} .$$

3. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x - \frac{2}{3} \ln(1 + x^3) .$$

(a) Determinare il campo di esistenza di f .

(b) Determinare gli eventuali asintoti di f .

(c) Determinare i punti di massimo locale e di minimo locale di f .

(d) Disegnare il grafico qualitativo di f .

(e) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 6 .

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = t + \sin t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi] .$$

(a) Verificare che la curva γ è regolare.

(b) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto $P \equiv (1, 0, 1)$.

(c) Determinare la curvatura di γ nel punto P .

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 3 punti	**Totale**

1. Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
2. (a) Dire come si calcola l'area di un parallelogrammo in $\mathbb{R}^2$ i cui vettori associati a 2 lati contigui sono $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

   (b) Dire come si calcola il volume di un parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$ i cui vettori associati a 3 lati contigui sono $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Istruzioni. *Le risposte devono essere scritte sul foglio di bella. Non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *15 minuti.*

Punteggio minimo per la sufficienza: 4 (prima parte) + 14 (seconda parte).

Soluzioni

1. (a) Sia $z = x + \mathrm{i}\, y$, con $x, y, \in \mathbb{R}$. L'insieme A è il luogo dei punti tali che $|x+1+\mathrm{i}(y-1)| = |x+\mathrm{i}\, y|$, ossia $(x+1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2$. Quindi A corrisponde alla retta di equazione $y = x+1$ del piano di Gauss. Analogamente, l'insieme B è il luogo dei punti tali che $x + y = 0$. Quindi B corrisponde alla retta di equazione $y = -x$ del piano di Gauss.

   (b) La soluzione del sistema è data dall'intersezione $A \cap B$, ossia dall'intersezione delle due rette corrispondenti, ossia dal sistema

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = -x \end{cases}$$

   dal quale si ha $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$, e quindi $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

   (c) Si ha

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$$
$$z_2 = (1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = -1\,.$$

2. Per $x \to 0^+$, si ha

$$\frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{x^\alpha - (x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}))}{x^6 + x^{6\alpha^2}} \sim \frac{\frac{1}{6}x^{3\alpha}}{x^6 + x^{6\alpha^2}}.$$

Se $\alpha \in (0,1)$, allora

$$x^6 + x^{6\alpha^2} \sim x^{6\alpha^2}\,.$$

In questo caso, quindi, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \begin{cases} 0 & \alpha \in (0, 1/2] \\ \frac{1}{6} & \alpha = 1/2 \\ +\infty & \alpha \in (1/2, 1). \end{cases}$$

Se invece $\alpha \geq 1$, allora

$$x^6 + x^{6\alpha^2} \sim x^6\,.$$

In questo caso, quindi, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \begin{cases} +\infty & \alpha \in [1, 2) \\ \frac{1}{6} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Da qui si ricavano i valori per i tre valori di α richiesti:

$$\alpha = \frac{1}{4}: \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = 0$$
$$\alpha = 1: \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = +\infty$$
$$\alpha = 2: \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^6 + x^{6\alpha^2}} = \frac{1}{6}\,.$$

3. (a) La funzione f è definita per $1 + x^3 > 0$, ossia per $x > -1$. Pertanto il campo di esistenza di f è $D = (-1, +\infty)$.

(b) La funzione f ha un asintoto verticale per $x \to (-1)^+$, essendo

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \left(x - \frac{2}{3}\ln(1+x^3)\right) = +\infty\,.$$

Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{2}{3}\ln(1+x^3)\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{\ln(1+x^3)}{x}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}\ln(1+x^3) = -\infty$$

la funzione f non presenta né asintoto orizzontale né asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(c) La derivata prima di f è

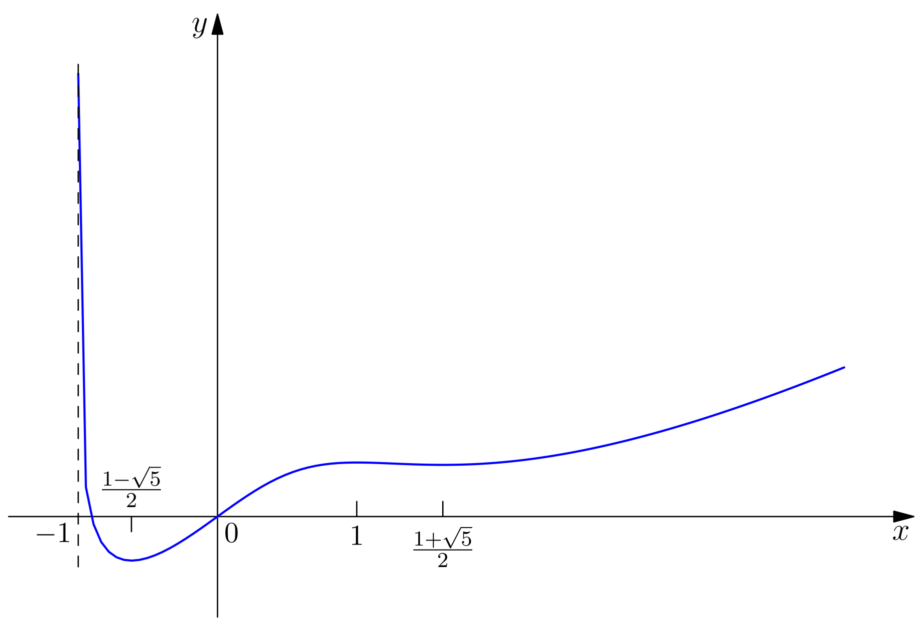
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\,\frac{3x^2}{1+x^3} = \frac{x^3+2x^2+1}{1+x^3} = \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{1+x^3}$$

essendo

$$x^3+2x^2+1 = x^3+2x^2+x-x+1 = x(x-1)^2-(x-1) = (x-1)(x^2-x-1)\,.$$

Poiché $1+x^3>0$ su D, si ha $f'(x)\geq 0$ se e solo se $(x-1)(x^2-x-1)\geq 0$. Pertanto, la funzione f è decrescente per $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e per $1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ed è crescente per $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<1$ e per $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Di conseguenza, la funzione f presenta un punto di massimo locale per $x=1$, e un punto di minimo locale per $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(d) Il grafico qualitativo di f è



(e) Usando lo sviluppo di MacLaurin della funzione logaritmo (tenuto conto del fatto che x^3 è una funzione infinitesima per $x\to 0$), lo sviluppo di MacLaurin di f di ordine 6 è

$$f(x) = x - \frac{2}{3}\ln(1+x^3) = x - \frac{2}{3}\left(x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\right) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\,.$$

4. Iniziamo con l'osservare che si ha

$$\begin{cases} x' = 1 - \sin t \\ y' = 1 + \cos t \\ z' = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = -\cos t \\ y'' = -\sin t \\ z'' = 0\,. \end{cases}$$

(a) Poiché le componenti di γ sono funzioni derivabili e $z'(t) = 1 \neq 0$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, la curva γ è regolare.

(b) Si vede subito che il punto $P \equiv (1, 0, 1)$ appartiene a γ e che corrisponde al punto che si ottiene per $t = 0$. Inoltre, si ha $f'(0) = (1, 2, 1)$ e $f''(0) = (-1, 0, 0)$. Quindi

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 2)$$

e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = \sqrt{5}$. Si hanno così i versori

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(0, -1, 2)}{\sqrt{5}}\,.$$

Infine, il versore normale è dato da

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-5, 2, 1)}{\sqrt{30}}\,.$$

(c) La curvatura di γ in P è

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}\,.$$