Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Primo compito in itinere – 13 Novembre 2017**

Cognome: ______________________ **Compito A**

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Teoria: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

Prima Parte

1. Dopo aver definito la differenziabilità e la derivabilità di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in (a, b)$, mostrare che le due definizioni sono equivalenti.

Seconda Parte

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq |z| \leq 2\,,\ \frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \,:\, w = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\, z \ \text{ con } z \in A \right\}.$$

(b) Determinare gli insiemi

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \left(z - \frac{\mathrm{i}}{2} \right)^3 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \right)^3 \right\} \qquad \text{e} \qquad B \cap C\,.$$

2. Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{4}}\,.$$

(a) Determinarne il dominio D e i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinarne gli estremi locali.

(c) Disegnarne il grafico qualitativo in base alle informazioni sopra determinate.

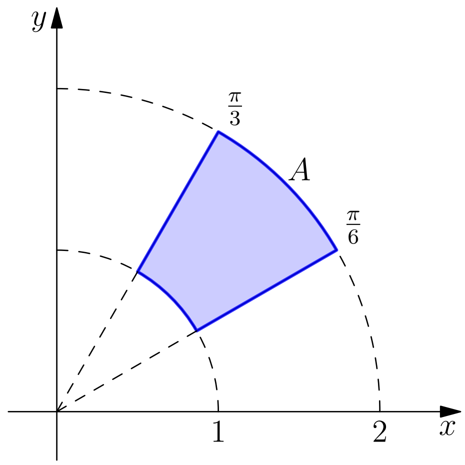
(d) Determinarne lo sviluppo di MacLaurin al 2° ordine e poi il valore di $f''(0)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *20 minuti.* Seconda parte: *70 minuti.*

Soluzioni

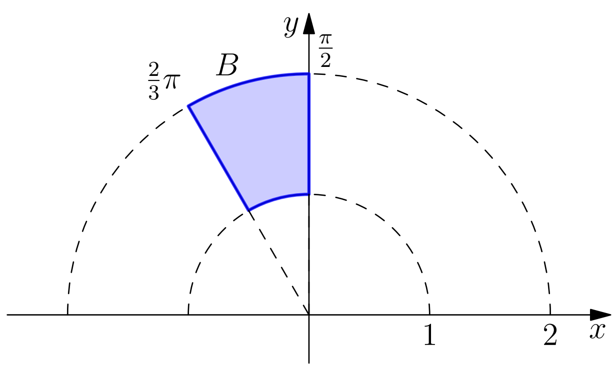
1. (a) Nel piano di Gauss si ha



Poiché $w_0 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ è un numero complesso di modulo 1 e di argomento $\theta = \frac{\pi}{3}$, l'insieme $B = w_0\, A$ si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine di un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$, in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \leq |z| \leq 2\,, \ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\,\pi \right\}$$

e, nel piano di Gauss, si ha



(b) Per determinare l'insieme C bisogna risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3.$$

Poiché

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}\,,$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}\,.$$

Poiché le radici cubiche di $-\mathrm{i}$ sono i e $\mp\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$
\begin{array}{lcl}
z - \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i} & \text{ossia} & z = \dfrac{\mathrm{i}}{2} + \mathrm{i} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i} \\
z - \dfrac{\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} & \text{ossia} & z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\
z - \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} & \text{ossia} & z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{array}
$$

Pertanto, si ha

$$C = \left\{ \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Infine, si ricava facilmente che

$$B \cap C = \left\{ \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \right\}$$

2. (a) Si ha $D = \mathbb{R}$. Inoltre, si hanno i limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

(b) La funzione f è derivabile in $D' = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, poiché ivi composta di funzioni derivabili. Inoltre, si ha

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(-x^2 - \frac{2}{3}x + 4)}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\mathrm{e}^x(x - x_-)(x_+ - x)}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

dove

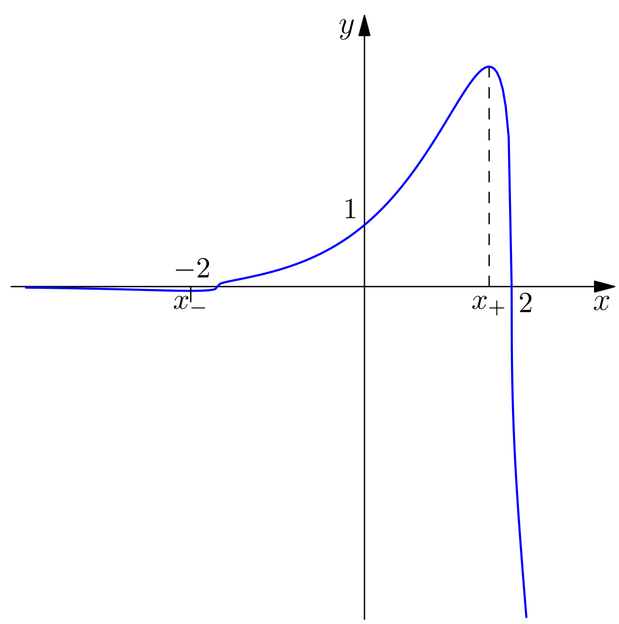
$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{3} \qquad \text{con} \qquad x_- < -2 < 0 < x_+ < 2\,.$$

Inoltre, f non è derivabile in $x = \pm 2$ poiché

$$\lim_{x \to \pm 2} f'(x) = \mp\infty\,.$$

Quindi f ha un minimo locale in x_- e un massimo locale in x_+.

(c) Il grafico della funzione è



(d) Per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\ &= 1 + x + \frac{5}{12}\, x^2 + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

Infine, si ha

$$f''(0) = \frac{5}{6}\,.$$

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo compito in itinere – 13 Novembre 2017**

Cognome: ______________________________ $\boxed{\textbf{Compito B}}$

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Teoria: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

Prima Parte

1. Dopo aver definito la differenziabilità e la derivabilità di una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in (a,b)$, mostrare che le due definizioni sono equivalenti.

Seconda Parte

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; 1 \le |z| \le 2\,,\; \frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \;:\; w = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\, z \;\text{ con } z \in A \right\}.$$

(b) Determinare gli insiemi

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; \left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3 \right\} \qquad \text{e} \qquad B \cap C\,.$$

2. Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{9}}\,.$$

(a) Determinarne il dominio D e i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinarne gli estremi locali.

(c) Disegnarne il grafico qualitativo in base alle informazioni sopra determinate.

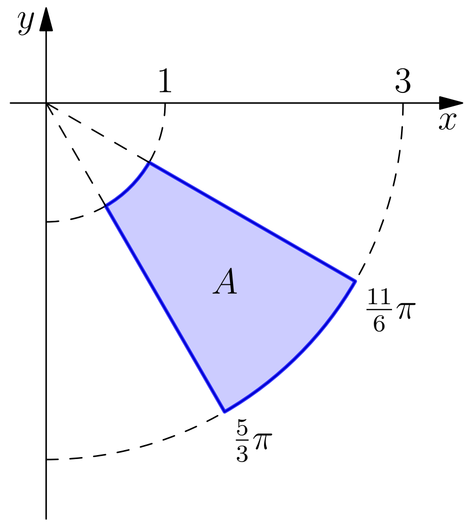
(d) Determinarne lo sviluppo di MacLaurin al 2° ordine e poi il valore di $f''(0)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *20 minuti.* Seconda parte: *70 minuti.*

Soluzioni

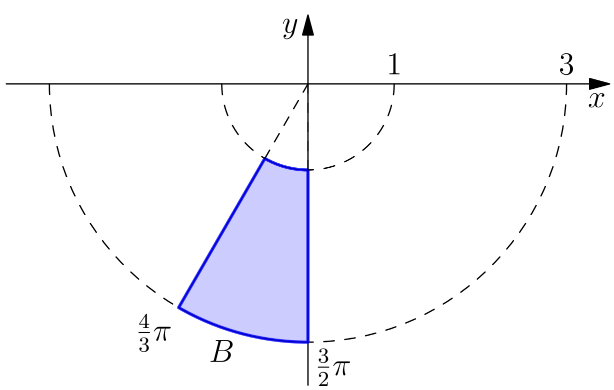
1. (a) Nel piano di Gauss si ha



Poiché $w_0 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ è un numero complesso di modulo 1 e di argomento $\theta = -\frac{\pi}{3}$, l'insieme $B = w_0\,A$ si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine di un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$, in senso orario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; 1 \leq |z| \leq 3\,,\; \frac{4}{3}\,\pi \leq \arg z \leq \frac{3}{3}\,\pi \right\}$$

e, nel piano di Gauss, si ha



(b) Per determinare l'insieme C bisogna risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Poiché

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i\,,$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^3 = -i^3 = i\,.$$

Poiché le radici cubiche di i sono $-\mathrm{i}$ e $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$z+\frac{\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z=-\frac{\mathrm{i}}{2}-\mathrm{i}=-\frac{3}{2}\,\mathrm{i}$$
$$z+\frac{\mathrm{i}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z+\frac{\mathrm{i}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Pertanto, si ha

$$C=\left\{-\frac{3}{2}\,\mathrm{i}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\,.$$

Infine, si ricava facilmente che

$$B\cap C=\left\{-\frac{3}{2}\,\mathrm{i}\right\}$$

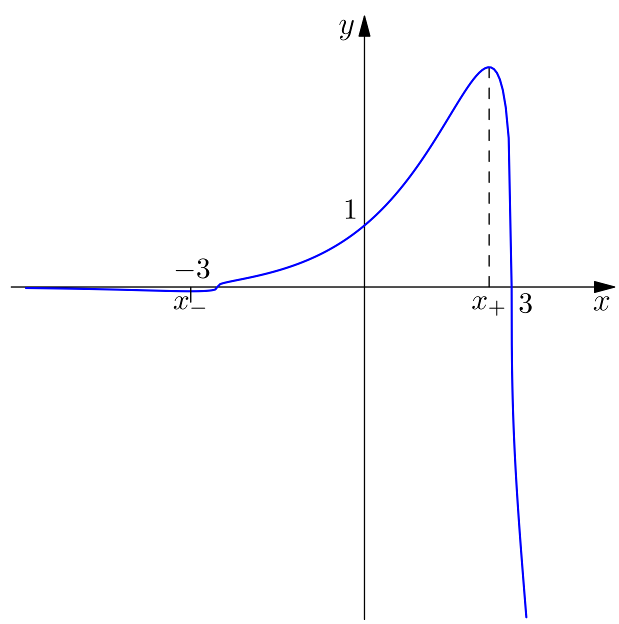
2. (a) $D=\mathbb{R}$; $\lim_{-\infty} f(x)=0^-$, $\lim_{+\infty} f(x)=-\infty$;

   (b) f e' derivabile in $D':=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, poiche' ivi composta di funzioni derivabili, ove

$$f'(x)=\frac{e^x(-x^2-\frac{2}{3}x+9)}{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{e^x(x-x_-)(x_+-x)}{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{2}{3}}} \qquad x_\pm=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{82}}{3}$$

   e $x_-<-3<0<x_+<3$. f non e' derivabile in $x=\pm 3$ poiche' $\lim_{x\to\pm 3} f'(x)=\infty$.
   Quindi f ha Min loc. in x_- e Max loc. in x_+.

   (c) Il grafico è



   (d)

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\,, \qquad \left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{27}x^2+o(x^2)$$
$$f(x)=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{27}x^2+o(x^2)\right)=1+x+\frac{25}{54}x^2+o(x^2)$$
$$f''(0)=\frac{25}{27}\,.$$