Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo compito in itinere – 13 Novembre 2017**

Cognome: ____________________ **Compito A**

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Teoria: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

Seconda Parte

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq 1\,,\ \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \;:\; w = \frac{z}{\mathrm{i}} \ \text{ con } z \in A \right\}.$$

(b) Determinare gli insiemi

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; \left(z + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \right)^3 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \right)^3 \right\} \qquad \text{e} \qquad B \cap C\,.$$

2. Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{4}}\,.$$

(a) Determinarne il dominio D e i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinarne gli estremi locali.

(c) Disegnarne il grafico qualitativo in base alle informazioni sopra determinate.

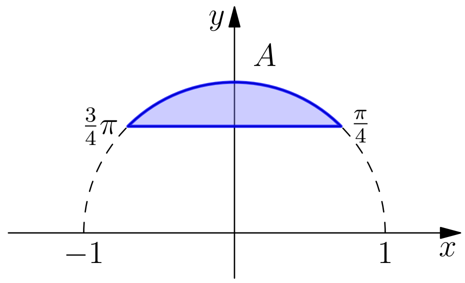
(d) Determinarne lo sviluppo di MacLaurin al 2° ordine e poi il valore di $f''(0)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *20 minuti.* Seconda parte: *70 minuti.*

Soluzioni

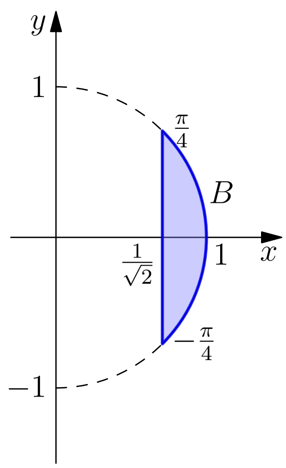
1. (a) Nel piano di Gauss si ha



Poiché $w_0 = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ è un numero complesso di modulo 1 e di argomento $\theta = -\frac{\pi}{2}$, l'insieme $B = w_0\,A$ si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine di un angolo $\theta = -\frac{\pi}{2}$, in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \le 1\,,\ \mathrm{Re}\, z \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

e, nel piano di Gauss, si ha



(b) Per determinare l'insieme C bisogna risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^3 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3.$$

Poiché

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{2} = -\mathrm{i}\,,$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^3 = -\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}\,.$$

Poiché le radici cubiche di i sono $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ e $-\mathrm{i}$, le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$z + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z + \frac{1}{2}\,\mathrm{i} = -\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i} - \mathrm{i} = -\frac{3}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

Pertanto, si ha

$$C = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, -\frac{3}{2}\,\mathrm{i} \right\}.$$

Infine, si ricava facilmente che

$$B \cap C = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

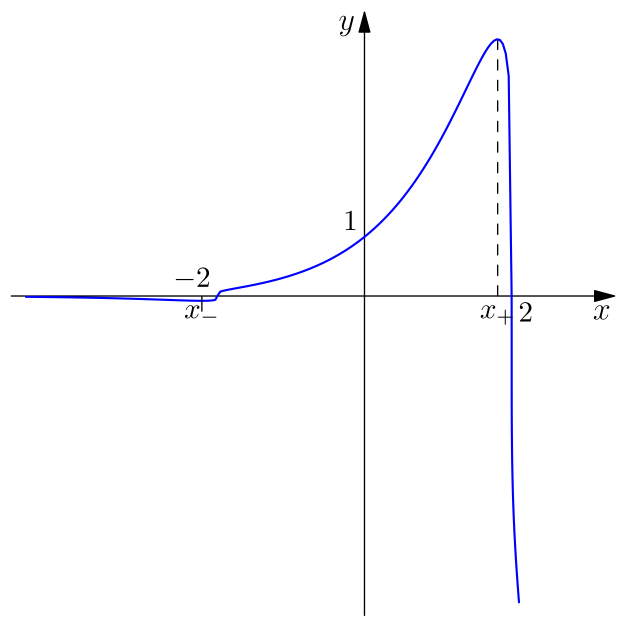
2. (a) $D = \mathbb{R}$; $\lim_{-\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$;

   (b) f e' derivabile in $D' := (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, poiche' ivi composta di funzioni derivabili, ove

$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2 - \frac{2}{5}x + 4)}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{e^x(x - x_-)(x_+ - x)}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{4}{5}}} \qquad x_\pm = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{101}}{5}$$

   e $x_- < -2 < 0 < x_+ < 2$. f non e' derivabile in $x = \pm 2$ poiche' $\lim_{x \to \pm 2} f'(x) = \infty$. Quindi f ha Min loc. in x_- e Max loc. in x_+.

   (c) Il grafico della funzione è



   (d)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,, \qquad \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{20}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{20}x^2 + o(x^2)\right) = 1 + x + \frac{9}{20}x^2 + o(x^2)$$

$$f''(0) = \frac{9}{10}\,.$$

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 **Primo compito in itinere – 13 Novembre 2017**

Cognome: ______________________ **Compito B**

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Teoria: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

Seconda Parte

1. (a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 3\,,\ \operatorname{Im} z \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \,:\, w = \frac{z}{\mathrm{i}} \ \text{ con } z \in A \right\}.$$

(b) Determinare gli insiemi

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \left(z + \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \right)^3 = \left(3\,\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \right)^3 \right\} \qquad \text{e} \qquad B \cap C\,.$$

2. Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{9}}\,.$$

(a) Determinarne il dominio D e i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinarne gli estremi locali.

(c) Disegnarne il grafico qualitativo in base alle informazioni sopra determinate.

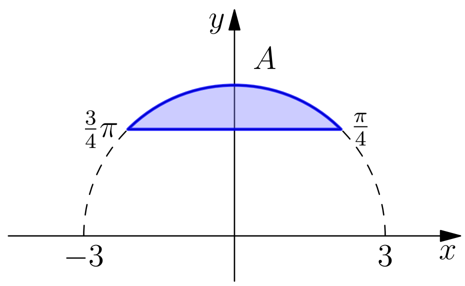
(d) Determinarne lo sviluppo di MacLaurin al 2° ordine e poi il valore di $f''(0)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *20 minuti.* Seconda parte: *70 minuti.*

Soluzioni

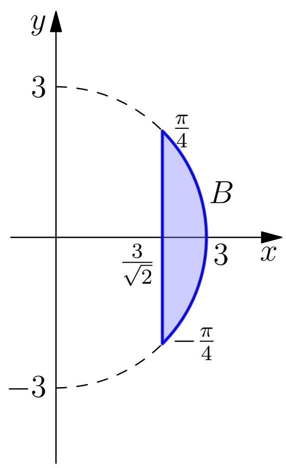
1. (a) Nel piano di Gauss si ha



Poiché $w_0 = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ è un numero complesso di modulo 1 e di argomento $\theta = -\frac{\pi}{2}$, l'insieme $B = w_0\, A$ si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine di un angolo $\theta = -\frac{\pi}{2}$, in senso antiorario. Pertanto, si ha

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 3\,,\ \mathrm{Re}\, z \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}$$

e, nel piano di Gauss, si ha



(b) Per determinare l'insieme C bisogna risolvere l'equazione

$$\left(z + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)^3 = \left(3\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3.$$

Poiché

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{2} = -\mathrm{i}\,,$$

si tratta di risolvere l'equazione

$$\left(z - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)^3 = -3^3\mathrm{i}^3 = 3^3\mathrm{i}\,.$$

Poiché le radici cubiche di i sono $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ e $-\mathrm{i}$, le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$z + \frac{3}{2}\,\mathrm{i} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z + \frac{3}{2}\,\mathrm{i} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z + \frac{3}{2}\,\mathrm{i} = -3\mathrm{i} \qquad \text{ossia} \qquad z = -\frac{3}{2}\,\mathrm{i} - 3\mathrm{i} = -\frac{9}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

Pertanto, si ha

$$C = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,, -\frac{9}{2}\,\mathrm{i} \right\}.$$

Infine, si ricava facilmente che

$$B \cap C = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

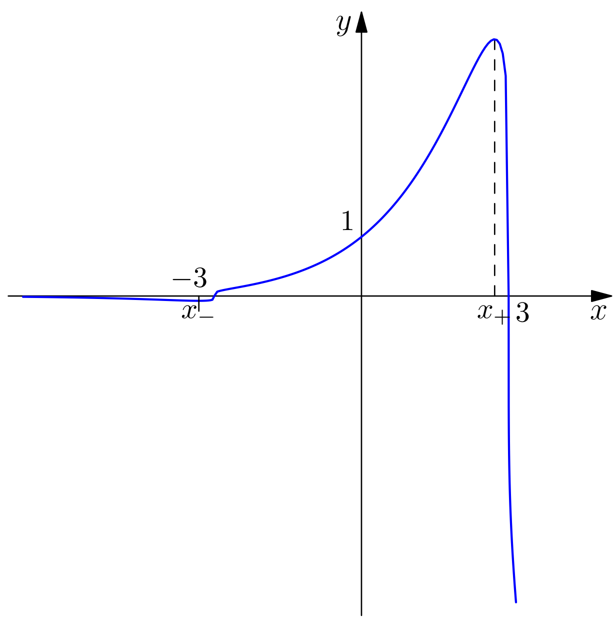
2. (a) $D = \mathbb{R}$; $\lim_{-\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$;

(b) f e' derivabile in $D' := (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, poiche' ivi composta di funzioni derivabili, ove

$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2 - \frac{2}{5}x + 9)}{9\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{e^x(x - x_-)(x_+ - x)}{9\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}} \qquad x_\pm = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{226}}{5}$$

e $x_- < -3 < 0 < x_+ < 3$. f non e' derivabile in $x = \pm 3$ poiche' $\lim_{x\to\pm 3} f'(x) = \infty$.
Quindi f ha Min loc. in x_- e Max loc. in x_+.

(c) Il grafico della funzione è



(d)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,, \qquad \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{45}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{45}x^2 + o(x^2)\right) = 1 + x + \frac{43}{90}x^2 + o(x^2)$$

$$f''(0) = \frac{43}{45}\,.$$