Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — **Secondo compito in itinere – 22 Gennaio 2018**

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Teoria: 4 punti	**Es.1**: 5 punti	**Es.2**: 7 punti	**Totale**

Prima Parte

1. (a) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

   (b) Mostrare con un esempio che il teorema può non valere nel caso di funzioni limitate ma discontinue.

Seconda Parte

1. (a) Determinare la soluzione f del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \dfrac{t}{1+t^2}\, y(t) = t \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   specificandone il dominio.

   (b) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\,.$$

2. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \frac{1}{9}\, \ln(1+9t^2) \\ y = \operatorname{artg} 3t \\ z = -3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare la terna intrinseca $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ di γ per $t = 0$.

   (b) Determinare il piano osculatore a γ per $t = 0$.

   (c) Determinare la curvatura, il raggio di curvatura e l'equazione della circonferenza osculatrice di γ per $t = 0$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte: *20 minuti.* Seconda parte: *70 minuti.*

Soluzioni

1. (a) La soluzione generale dell'equazione differenziale data è

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} \left[\int t\mathrm{e}^{-\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\ln(1+t^2)} \left[\int t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t + c \right] \\ &= \sqrt{1+t^2} \left[\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t + c \right] \\ &= \sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{1+t^2} + c \right) \\ &= 1 + t^2 + c\sqrt{1+t^2} \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Imponendo la considione iniziale, si ha $\frac{1}{2} = 1 + c$, ossia $c = -\frac{1}{2}$. Quindi, la soluzione cercata è

$$f(t) = 1 + t^2 - \frac{1}{2}\,\sqrt{1+t^2}\,.$$

Tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(b) La funzione $f(t)$ è continua e positiva su tutto $\mathbb{R}$. Pertanto, la funzione

$$g(t) = \frac{1}{f(t)}$$

è continua e positiva su tutto l'intervallo $[0, +\infty)$. Pertanto, si tratta di studiare l'integrabilità di g in un intorno di $+\infty$. Si ha

$$g(t) \sim \frac{1}{t^2} \qquad \text{per} \quad t \to +\infty\,.$$

Essendo la funzione $1/t^2$ integrabile a $+\infty$, possiamo dire (per il criterio del confronto asintotico) che anche la funzione f integrabile a $+\infty$. In conclusione, l'integrale I è convergente.

2. (a) Si ha

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2t}{1+9t^2} \\ y' = \dfrac{3}{1+9t^2} \\ z' = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2\dfrac{1-9t^2}{(1+9t^2)^2} \\ y'' = -\dfrac{54\,t}{(1+9t^2)^2} \\ z'' = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto, si ha $f'(0) = (0,3,0) = 3\mathbf{j}$, $f''(0) = (2,0,0) = 2\mathbf{i}$ e $f'(0) \wedge f''(0) = 3\mathbf{j} \wedge 2\mathbf{i} = -6\mathbf{k}$. Quindi, si ha $\mathbf{t}(0) = \mathbf{j}$, $\mathbf{b}(0) = -\mathbf{k}$ e $\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = -\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{i}$.

(b) Poiché la curva γ è piana, il piano osculatore è costante e coincide con il piano che la contiene, ossia con il piano di equazione $z = -3$.

(c) Poiché $\|f'(0)\| = 3$ e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = 6$, si ha

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \qquad \text{e} \qquad \rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{9}{2}\,.$$

Inoltre, poiché $P = f(0) = (0,0,-3)$, il centro di curvatura è

$$C(0) = P + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (0,0,-3) + \frac{9}{2}\,(1,0,0) = \left(\frac{9}{2}, 0, -3\right).$$

In conclusione, l'equazione della circonferenza osculatrice è

$$\begin{cases} \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{81}{4} \\ z + 3 = 0\,. \end{cases}$$