Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 *Primo Appello – 13 Febbraio 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 5 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

1. (a) Determinare l'insieme $S \subseteq \mathbb{C}$ delle soluzioni dell'equazione

$$z^2 - z\bar{z} - \frac{2}{\mathrm{i}}\, z = 0\,.$$

(b) Nel piano di Gauss, disegnare l'insieme

$$A = \{w \in \mathbb{C} \;:\; w = z + 3\mathrm{i},\; z \in S\}\,.$$

2. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)^2\,.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione D di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Determinare la derivata prima di f, gli insiemi di monotonia, i punti di estremo relativo.

(c) Tracciare il grafico qualitativo di f.

(d) Scrivere la formula di MacLaurin di ordine 2 di f, con resto secondo Peano.

3. (a) Determinare l'unica soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 - y)(2 - y) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

specificandone il dominio più ampio in cui risulta essere soluzione.

(b) Dire se la soluzione è limitata sul dominio e discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} u(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t \\ y = \mathrm{e}^t \sin t \\ z = \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

(a) Determinare il parametro arco della curva γ e scrivere le equazioni parametriche di γ mediante il parametro arco.

(b) Determinare la terna intrinseca $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ di γ per $t = 0$.

(c) Determinare la curvatura e il raggio di curvatura di γ per $t = 0$.

Teoria

1. (a) Definire il polinomio di Taylor associato a una funzione f, in un punto x_0.
   (b) Enunciare e dimostrare la formula di Taylor con il resto secondo Peano.
2. (a) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
   (b) Definire l'angolo tra due vettori.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte (Teoria): *30 minuti.* Seconda parte: *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Poiché $\frac{2}{\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$, l' equazione diventa

$$z(z - \bar{z} + 2\mathrm{i}) = 0\,,$$

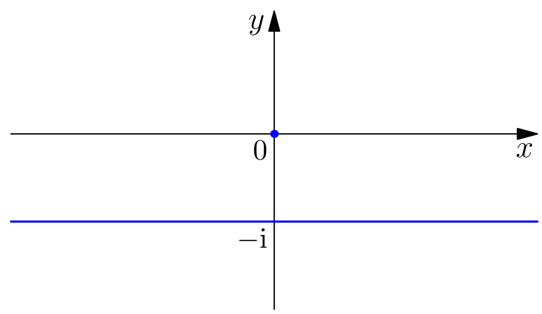
che è soddisfatta se e solo se $z = 0$ oppure $z - \bar{z} + 2\mathrm{i} = 0$, ossia

$$\frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} = -1$$

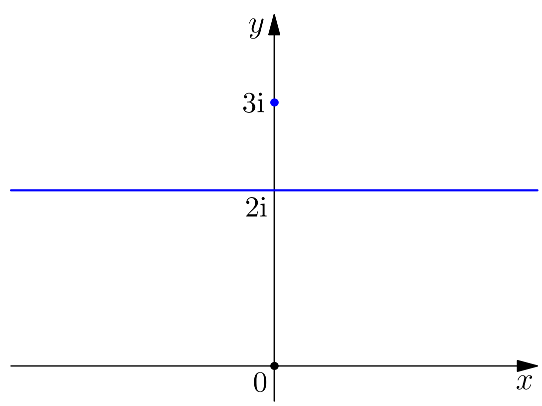
ossia $\operatorname{Im} z = -1$. Quindi, si ha

$$S = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z = -1\}\,.$$

(b) Nel piano di Gauss, l'insieme S è dato dall'unione della retta di equazione $\operatorname{Im} z = -1$ e del punto $z = 0$:



Ne segue che $A = S + 3\mathrm{i}$ è l'unione della retta di equazione $\operatorname{Im} z = 2$ e del punto $z = 3\mathrm{i}$:



2. (a) La funzione f è ben definita se e solo se $x^2-1 \neq 0$ e $x+2 \neq 0$. Perció $D = \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$. La funzione f è continua in D, essendo composizione di funzioni continue in D. Poiché

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to -1} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = +\infty\,,$$

le rette di equazione $x = -1$, $x = 1$ e $x = -2$ sono asintoti verticali per f. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,,$$

non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

(b) La funzione f è derivabile in D, essendo composta di funzioni derivabili in D. Poiché

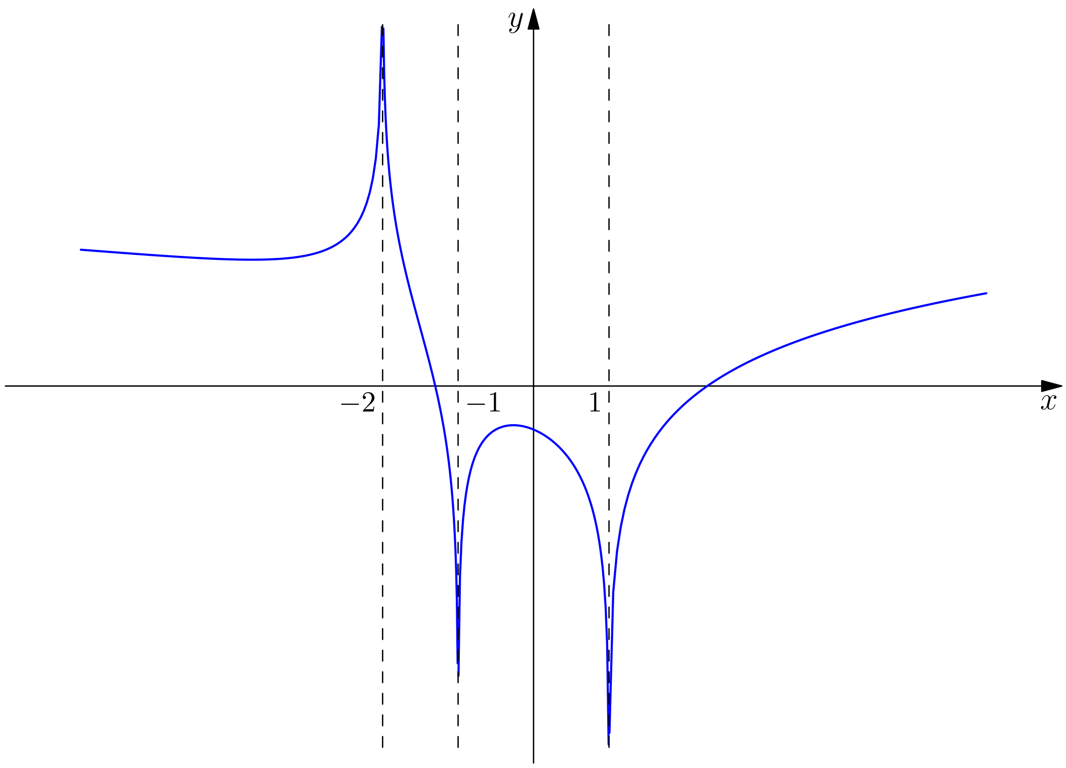
$$f'(x) = 2\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)^2 \frac{x^2-1}{x+2}\,\frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{2(x^2+4x+1)}{(x^2-1)(x+2)} \qquad \forall\, x \in D\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad -2-\sqrt{3} < x < -2 \quad \text{o} \quad -1 < x < -2+\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x > 1\\
f'(x) < 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x < -2-\sqrt{3} \quad \text{o} \quad -2 < x < -1 \quad \text{o} \quad -2+\sqrt{3} < x < 1\\
f'(x) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x = -2-\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = -2+\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto f è crescente in $(-2-\sqrt{3},-2)$, in $(-1,-2+\sqrt{3})$ e in $(1,+\infty)$. Invece f è decrescente in $(-\infty,-2-\sqrt{3})$, in $(-2,-1)$ e in $(-2+\sqrt{3},1)$. Inoltre, $x=-2-\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x=-2+\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo.

(c) Il grafico di f è



(d) Abbiamo

$$f''(x) = -\frac{2(x^4+8x^3+12x^2+8x+7)}{(x+2)^2(x^2-1)^2} \qquad \forall\, x \in D\,.$$

Pertanto $f''(0) = -\frac{7}{2}$, e la formula richiesta è

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) = -\log 4 - x - \frac{7}{4}x^2 + o(x^2)\,.$$

Oppure, si può procedere nel modo seguente, sfruttando lo sviluppo di MacLaurin del logaritmo. Poiché in un intorno di $x=0$ la funzione è negativa, si ha

$$\begin{aligned}
f(x) = 2\ln\frac{1-x^2}{2+x} &= -2\ln(2+x) + 2\ln(1-x^2) = -2\ln 2\Big(1+\frac{x}{2}\Big) + 2\ln(1-x^2)\\
&= -2\ln 2 - 2\ln\Big(1+\frac{x}{2}\Big) + 2\ln(1-x^2)\,.
\end{aligned}$$

Poiché le funzioni $x/2$ e x^2 sono infinitesime per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\ln 2 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) + 2(-x^2 + o(x^2)) \\ &= -2\ln 2 - x - \frac{x^2}{4} - 2x^2 + o(x^2) \\ &= -2\ln 2 - x - \frac{7}{4}\,x^2 + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

3. (a) L'equazione del problema dato è a variabili separabili. Osserviamo che la soluzione del problema non può essere costante uguale a 1 o a 2. Pertanto, separando le variabili, avremo

$$\int \frac{1}{(1-y)(2-y)}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x = x + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Poiché

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y}\,,$$

si ha

$$-\ln(1-y) + \ln(2-y) = x + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $c = \ln 2$. Pertanto, si ha

$$\ln\frac{(2-u)}{2(1-u)} = x\,.$$

Risolvendo rispetto a u, troviamo la soluzione

$$u(x) = \frac{2(\mathrm{e}^x - 1)}{2\mathrm{e}^x - 1}\,,$$

che è definita sull'intervallo $(-\ln 2, +\infty)$.

(b) La soluzione u non è limitata sul dominio. Infatti

$$\lim_{x\to -\ln 2^+} u(x) = -\infty\,.$$

Tuttavia, la soluzione è limitata su $(0, +\infty)$. Essendo però

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$$

ne segue che l'integrale I è un integrale improprio divergente.

4. Sia f la funzione vettoriale che dà la parametrizzazione di γ.

(a) Si ha

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\sin t \\ y' = \mathrm{e}^t\sin t + \mathrm{e}^t\cos t \\ z' = \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto $\|f'(t)\| = \sqrt{3}\mathrm{e}^t$, ed il parametro arco è dato da

$$s(t) = \int_0^t \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u = \sqrt{3}\int_0^t \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \sqrt{3}\,(e^t - 1)\,.$$

Quindi, si ha

$$t = t(s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

e la riparametrizzazione di γ rispetto al parametro arco è

$$\begin{cases} x = \left(1 + \dfrac{s}{\sqrt{3}}\right) \cos \ln \left(1 + \dfrac{s}{\sqrt{3}}\right) \\ y = \left(1 + \dfrac{s}{\sqrt{3}}\right) \sin \ln \left(1 + \dfrac{s}{\sqrt{3}}\right) \\ z = 1 + \dfrac{s}{\sqrt{3}} \end{cases} \qquad s \in [0, L]$$

dove L denota la lunghezza di γ.

(b) La terna intrinseca è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) \\ \mathbf{n}(t) &= \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t + \sin t), \sin t - \cos t, 0) \\ \mathbf{b}(t) &= \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-\cos t + \sin t), -\sin t - \cos t, 2) \end{aligned}$$

per $t \in [0, 1]$. Perciò per $t = 0$ avremo

$$\mathbf{t}(0) = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \qquad \mathbf{n}(0) = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{b}(0) = \frac{(-1,-1,2)}{\sqrt{6}}.$$

(c) Si ha $f'(0) = (1, 1, 1)$. Inoltre, si ha

$$f''(t) = (-2\mathrm{e}^t \sin t, 2\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t) \qquad t \in [0, 1].$$

Quindi $f''(0) = (0, 2, 1)$, e

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Infine, il raggio di curvatura è

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$