Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 *Secondo Appello – 25 Giugno 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 5 punti	**Es.4**: 9 punti	**Totale**

1. Si considerino i piani $\pi \,:\, x-y-z-1=0$ e $\pi' \,:\, 3x-y+z-1=0$, e il punto $A \equiv (0,3,4)$.
   (a) Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \pi'$.
   (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s, se esiste, che passi per il punto A e sia parallela ai piani π e π'.

2. (a) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di
$$f(x) = \arctan\sqrt{|x^2-1|} \qquad x \in \mathbb{R}$$
   specificando se si tratti rispettivamente di un minimo assoluto e di un massimo assoluto.
   (b) Utilizzando l'identità
$$\arctan t + \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} \qquad (\text{per } t > 0)$$
   stabilire se la funzione g, definita da
$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{|x^2-1|}\,,$$
   è integrabile (in senso generalizzato) in un intorno di $+\infty$.

3. Sia $T : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la trasformazione, avente per dominio e codominio il piano complesso bucato $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, definita da
$$T(z) = \frac{4}{\overline{z}}$$
   (dove $\overline{z}$ denota il coniugato di z).
   (a) Sia $z = x + \mathrm{i}y$ la forma algebrica del numero complesso $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Scrivere il numero complesso $T(z)$ in forma algebrica.
   (b) Calcolare $(T\circ T)(z) = T(T(z))$, dove $T\circ T$ denota la funzione composta. T è invertibile?
   (c) Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\mathrm{Fix}(T) = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \;:\; T(z) = z\}$ dei punti fissi di T.

4. L'equazione differenziale
$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{1}$$
   è un modello di un circuito elettrico in cui $i = i(t)$ è l'intensità di corrente, V la tensione, R la resistenza e L l'induttanza.
   (a) *Primo caso*: R, L e V costanti positive. Determinare la soluzione $i(t)$ dell'equazione (1) che soddisfa la condizione iniziale $i(0) = 0$. Il grafico di tale soluzione ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ (ossia, per grandi valori di t, la corrente è costante)?
   (b) *Secondo caso*: $R = L = 1$ e $V = \sin\omega t$. Consideriamo l'equazione:
$$\frac{di}{dt} + i = \sin\omega t \tag{2}$$
      i. Trovare tutte le primitive della funzione $\varphi(t) = \mathrm{e}^t \sin\omega t$, $t \in \mathbb{R}$ (ω costante reale).
      ii. Trovare la soluzione generale dell'equazione (2) e la soluzione particolare $i(t)$ di (2) tale che $i(0) = 0$. Il grafico di quest'ultima soluzione particolare ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$?

Teoria

1. Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione delle curve piane mediante il versore binormale.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte (Teoria): *30 minuti.* Seconda parte: *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Poiché i due piani non sono paralleli, la loro intersezione determina una retta r. Un vettore direttore di r è un qualunque multiplo (non nullo) del prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, dove $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$ individua la direzione ortogonale di π e $\mathbf{v}'(3, -1, 1)$ individua la direzione ortogonale di π'. Pertanto, un vettore di direzione di r è dato da $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$.

   (b) Esiste un'unica retta s che passa per il punto A e che è parallela a π e a π', ossia la retta passante per A e parallela alla retta r. Quindi

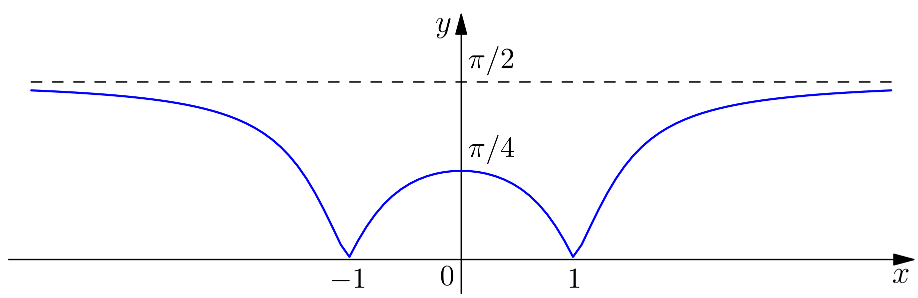
$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

2. (a) La funzione f è continua su $\mathbb{R}$, non negativa e pari. Possiamo studiarla per $x \geq 0$. La funzione $|x^2 - 1|$ è decrescente su $[0, 1]$ e crescente su $[1, +\infty)$. Siccome le funzioni radice quadrata ($t \longmapsto \sqrt{t}$) e arctan sono entrambe crescenti su $[0, +\infty)$, anche la funzione composta $f(x) = \arctan \sqrt{|x^2 - 1|}$ è decrescente su $[0, 1]$ e crescente su $[1, +\infty)$. Allora

   i. $\inf f = 0 = f(1) = f(-1)$, e quindi 0 è il minimo assoluto di f;

   ii. $\sup f = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2$ (che non è massimo assoluto, perché il valore $\pi/2$ non appartiene all'immagine di arctan).

   Inoltre, in $x = 0$ la funzione ha un punto di massimo locale, non assoluto. Il grafico di f è



   (b) Osservazione L'identità

$$\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} \qquad (t > 0)$$

   esprime il fatto che la somma degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è un angolo retto. Possiamo dimostrarla anche nel modo seguente. La derivata di $F(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$ è nulla sull'intervallo $(0, +\infty)$:

$$F'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot (-1)\frac{1}{t^2} = 0$$

   Dunque F è costante su $(0, +\infty)$. Per determinare il valore K di tale costante, basta valutare F in un punto qualsiasi del suo dominio. Ad esempio, $K = g(1) = \pi/2$.

   Per l'osservazione precedente, per $x \to +\infty$, si ha

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{x^2 - |} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 - |}} \sim \arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}.$$

   Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la funzione g non è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$.

3. (a) La forma algebrica di $T(z)$ è

$$T(z) = \frac{4}{\bar{z}} = \frac{4z}{z\bar{z}} = \frac{4(x+iy)}{x^2+y^2} = \frac{4x}{x^2+y^2} + \frac{4y}{x^2+y^2}\,\mathrm{i}.$$

(b) Risulta

$$(T \circ T)(z) = T(T(z)) = \frac{4}{\overline{T(z)}} = \frac{4}{\overline{\left(\frac{4}{\overline{z}}\right)}} = z$$

Dunque $T \circ T$ è l'identità (di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Pertanto T è invertibile (e $T^{-1} = T$).

(c) I punti fissi di T sono determinati dall'equazione $\dfrac{4}{\overline{z}} = z$, ossia $z\overline{z} = 4$, ossia $|z|^2 = 4$. Dunque l'insieme dei punti fissi di T è la circonferenza di centro 0 e raggio 2.

4. (a) L'equazione non omogenea (1) ha una (e una sola) soluzione costante V/R. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $L\dfrac{di}{dt}+Ri = 0$ è $ce^{-\frac{R}{L}t}$, $c \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione (1) è

$$ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}, \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

La condizione iniziale $i(0) = 0$ impone $c = -V/R$. Pertanto, la soluzione soddisfacente $i(0) = 0$ è

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = V/R,$$

(perché $R/L > 0$ e quindi l'esponenziale è decrescente), il grafico di $i(t)$ ha l'asintoto $i = V/R$ per $t \to +\infty$. La corrente di lungo periodo è quindi costante e uguale a V/R.

(b) Applichiamo due volte il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int e^t \sin\omega t &= e^t \sin\omega t - \int e^t \omega \cos\omega t\, dt \\ &= e^t \sin\omega t - \omega \left[e^t \cos\omega t + \omega \int e^t \sin\omega t\, dt\right] \\ &= e^t \sin\omega t - \omega e^t \cos\omega t - \omega^2 \int e^t \sin\omega t\, dt\end{aligned}$$

Quindi

$$\int e^t \sin\omega t\, dt = \frac{e^t}{1+\omega^2}\left(\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right) + k \tag{3}$$

Altro modo: da $e^{t+i\omega t} = e^t(\cos\omega t + i\sin\omega t)$, segue che $e^t \sin\omega t = \mathtt{Im}(e^{t+i\omega t})$. Una primitiva di $e^{(1+i\omega)t}$ è

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i\omega}e^{t+i\omega t} &= \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}e^{t+i\omega t} \\ &= \frac{e^t}{1+\omega^2}(1-i\omega)(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ &= \frac{e^t}{1+\omega^2}(\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + i\frac{e^t}{1+\omega^2}(\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\end{aligned}$$

Quindi una primitiva di $e^t \sin\omega t$ è $\dfrac{e^t}{1+\omega^2}\left(\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right)$.

(E una primitiva di $e^t \cos\omega t$ è $\dfrac{e^t}{1+\omega^2}\left(\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right)$.)

(c) La soluzione generale dell'equazione (2) è

$$
\begin{aligned}
e^{-t}\left(c+\int e^{t}\sin\omega t\,dt\right) &= ce^{-t}+e^{-t}\left[\frac{e^{t}}{1+\omega^{2}}\left(\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right)\right]\\
&= ce^{-t}+\frac{1}{1+\omega^{2}}\left(\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right) \qquad\qquad c\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

La condizione iniziale $i(0) = 0$ richiede $c - \dfrac{\omega}{1+\omega^2} = 0$. Quindi la soluzione che soddisfa $i(0) = 0$ è

$$
i(t) = \frac{\omega}{1+\omega^{2}}e^{-t}+\frac{1}{1+\omega^{2}}\left(\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right)
$$

Per $t \to +\infty$, il limite della funzione $i(t)$ (definita sopra) non esiste, e quindi non c'è un asintoto orizzontale. Dato che il termine $\dfrac{\omega}{1+\omega^2}e^{-t}$ decresce rapidamente per $t \to +\infty$, per grandi valori di t la corrente ha pressoché un andamento sinusoidale, con la stessa frequenza della tensione.