Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Terzo Appello – 16 Luglio 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 10 punti	**Es.2**: 4 punti	**Es.3**: 5 punti	**Es.4**: 5 punti	**Totale**

1. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{1 - x\mathrm{e}^{-x^2}}\,.$$

   (a) Determinare l'insieme di definizione D di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

   (b) Determinare la derivata prima di f, gli insiemi di monotonia, i punti di estremo relativo.

   (c) Tracciare il grafico qualitativo di f.

   (d) Stabilire se f è integrabile (eventualmente in senso improprio) su tutto D.

2. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine della funzione

$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x - (1-x)\,\cos x - x\,\sqrt[3]{1+x}\,.$$

3. Determinare il parametro reale α in modo che le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 3 - u \\ y = \alpha + u \\ z = 1 + u \end{cases}$$

   siano incidenti in un punto P. Per i valori di α trovati, determinare l'equazione del piano π che contiene le rette r ed s.

4. Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}s$$

   dove

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t \\ y = \mathrm{e}^t \sin t \\ z = \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi].$$

Teoria

1. (a) Enunciare il teorema degli zeri.
   (b) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi.
2. Enunciare e dimostrare la formula della distanza tra un punto e un piano.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte (Teoria): *30 minuti.* Seconda parte: *2 ore.*

---

1. (a) La funzione è definita per $xe^{-x^2} \neq 1$, ossia per $e^{x^2} \neq x$, e questa condizione è sempre verificata. Quindi $D = \mathbb{R}$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{-x^2}}{1-xe^{-x^2}} = 0 .$$

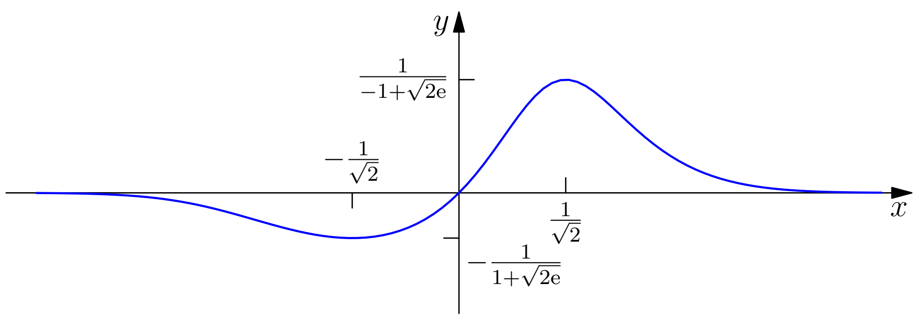
Pertanto, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to \pm\infty$.

(b) La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{(1-2x^2)\, e^{-x^2}}{(1-xe^{-x^2})^2} .$$

Il segno di f' coincide con il segno di $1-2x^2$. Quindi $f'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0$ per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, e $f'(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Di conseguenza, la funzione f è strettamente crescente per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed è strettamente decrescente per $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Inoltre, possiede un punto di minimo (assoluto) in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{1+\sqrt{2e}}\right)$ e possiede un punto di massimo (assoluto) in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{-1+\sqrt{2e}}\right)$.

(c) Il grafico di f è



(d) Si tratta di stabilire il carattere dell'integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{1-xe^{-x^2}}\, dx .$$

Per fare questo, si deve stabilire l'integrabilità in senso improprio di f a $+\infty$ e a $-\infty$ (separatamente). La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed è positiva su $[1, +\infty)$ e negativa su $(-\infty, -1]$. Inoltre, si ha

$$f(x) \sim xe^{-x^2} \qquad \text{per } x \to \pm\infty .$$

Poiché l'esponenziale e^{x^2} è un infinito di ordine superiore rispetto a ogni potenza x^α per $x \to \pm\infty$, ne segue che la funzione xe^{-x^2} è integrabile in senso improprio sia a $+\infty$ sia a $-\infty$. Di conseguenza, grazie al criterio del confronto asintotico, anche la funzione f è integrabile in senso improprio sia a $+\infty$ sia a $-\infty$, e quindi su tutto $\mathbb{R}$.

2. Poiché si hanno gli sviluppi di MacLaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x) ,$$

si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)\mathrm{e}^x - (1-x)\cos x - x\sqrt[3]{1+x} \\
&= (1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - (1-x)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - x\left(1+\frac{x}{3}+o(x)\right) \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+x+x^2+o(x^2) - \left(1-\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)\right) - x - \frac{x^2}{3}+o(x^2) \\
&= 2x+\frac{5}{3}\,x^2+o(x^2)\,.
\end{aligned}
$$

3. I vettori direttori delle rette r ed s sono rispettivamente $\mathbf{a} = (3,-1,-2)$ e $\mathbf{b} = (-1,1,1)$. Le due rette, quindi, non possono mai essere parallele. L'eventuale punto di intersezione si ottiene dal sistema

$$
\begin{cases}
1+3t = 3-u \\
3-t = \alpha+u \\
1-2t = 1+u
\end{cases}
$$

Dall'ultima equazione si ottiene $u = -2t$. Sostituendo nella prima equazione, si ha $3t = 2+2t$, ossia $t = 2$. Quindi si ha $u = -4$ e, dalla seconda equazione, si ha $3-2 = \alpha-4$, ossia $\alpha = 5$. Pertanto, per $\alpha = 5$, si ha il punto $P = r \cap s \equiv (7,1,-3)$.

Il piano π che contiene le rette r ed s può essere visto come il piano passante per il punto P e avente direzione normale data dal vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (1,-1,2)$. Pertanto, si ha

$$
\pi \;:\; 1\cdot(x-7) - 1\cdot(y-1) + 2\cdot(z+3) = 0
$$

ossia $\pi \;:\; x-y+2z = 0$.

4. Sia f la funzione vettoriale che dà la parametrizzazione di γ. Poiché

$$
\begin{cases}
x' = \mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\sin t \\
y' = \mathrm{e}^t\sin t + \mathrm{e}^t\cos t \\
z' = \mathrm{e}^t
\end{cases}
\qquad t \in [0,\pi],
$$

si ha $\|f'(t)\| = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^t$, e

$$
I = \int_0^\pi x(t)\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}\;\|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{6}\int_0^\pi \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t\,.
$$

Integrando per parti, si ha

$$
\int \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3t}\sin t - 3\int \mathrm{e}^{3t}\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3t}\sin t + 3\mathrm{e}^{3t}\cos t - 9\int \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t
$$

da cui si ha

$$
\int \mathrm{e}^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t) + c\,.
$$

Pertanto, si ha

$$
I = \sqrt{6}\left[\frac{\mathrm{e}^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t)\right]_0^\pi = -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\left(\mathrm{e}^{3\pi}+1\right).
$$