Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Quarto Appello – 4 Settembre 2018*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 5 punti	**Es.2**: 9 punti	**Es.3**: 5 punti	**Es.4**: 5 punti	**Totale**

1. Determinare e rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = \frac{-2}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\,.$$

Detto A l'insieme delle soluzioni trovate, rappresentare nel piano di Gauss l'insieme

$$B = \left\{ w = \frac{z}{2\mathrm{i}} \;:\; z \in A \right\} \subseteq \mathbb{C}\,.$$

2. (a) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \ln x - \operatorname{artg}(x-1)\,.$$

(Dominio di f, limiti agli estremi, eventuali asintoti, derivata prima (formula e dominio), studio del segno di f' (max/min), studio del segno di f (zeri), grafico).

(b) Calcolare il polinomio di Taylor arrestato all'ordine 2 di f nel punto $x_0 = 1$.

3. (a) Studiare, al variare del parametro reale β, la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^\beta}\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) Calcolare l'integrale I per $\beta = 1$.

4. (a) Dimostrare che la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1+t}{t} \\ z = \dfrac{1-t^2}{t} \end{cases} \qquad t \in [1,2]$$

è piana e trovare l'equazione del piano che la contiene.

(b) Determinare la curvatura di γ al variare del parametro t.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. Prima parte (Teoria): *30 minuti.* Seconda parte (Esercizi): *2 ore.*

Teoria

1. (a) Dare la definizione di funzione continua in un punto x_0 .
   (b) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto x_0 .
   (c) Dimostrare che una funzione derivabile in un punto x_0 è continua in x_0 .
2. (a) Scrivere la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
   (b) Scrivere e dimostrare la disuguaglianza triangolare.

.

1. Poiché l'equazione di partenza può essere riscritta come

$$z^4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\,,$$

si hanno le 4 soluzioni

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 &= \cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{i}\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 &= \cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{i}\cos\frac{11}{6}\pi = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

Sono 4 punti su una circonferenza di raggio 1, ruotati ogni volta di $\pi/2$.

Per l'insieme B, la divisione per $2\mathrm{i}$ ruota di $\pi/2$ in senso orario e poi dimezza il modulo. La rotazione porta le soluzioni nello stesso insieme di soluzioni; successivamente si dimezza il modulo. Quindi, l'insieme B è formato dagli elementi

$$w_0 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\,, \qquad w_1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\,, \qquad w_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\,, \qquad w_3 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

2. (a) Dominio di f: $D(f) = (0, +\infty)$.

   (b) Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

   (c) Eventuali asintoti: la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale destro per f. Poichè

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,,$$

   la funzione f non ammette asintoto obliquo.

   (d) Derivata prima (formula e dominio):

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(1+(x-1)^2)}\,, \qquad D(f') = D(f) = (0, +\infty).$$

   (e) Studio del segno di f' (max/min):

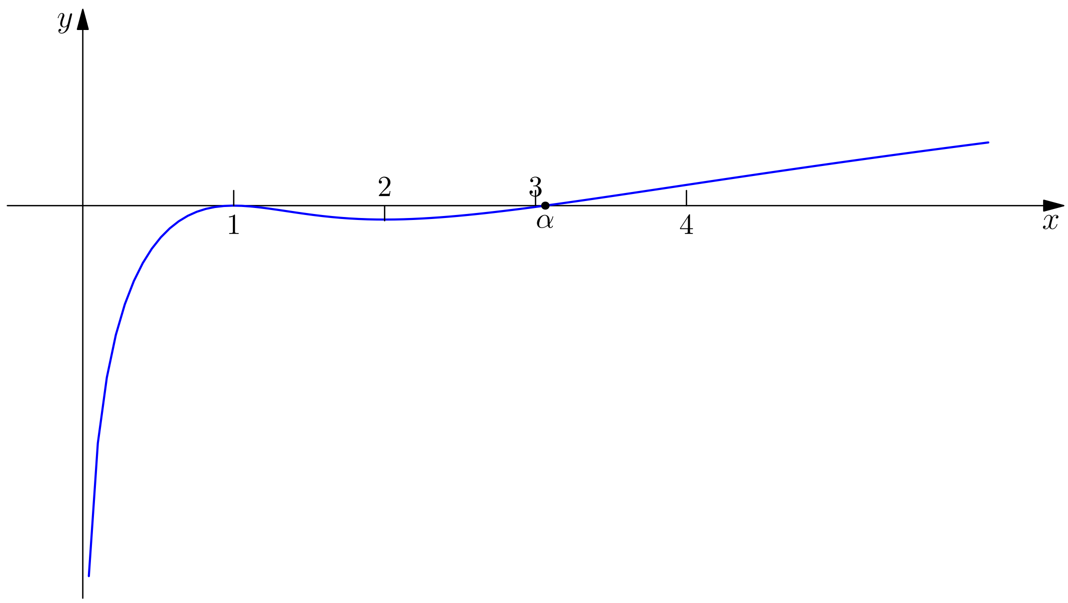
$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < x < 1 \text{ e } x > 2 \\ = 0 & \text{per } x = 1 \text{ e } x = 2 \\ < 0 & \text{per } 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 & \text{massimo locale per } f \\ x = 2 & \text{minimo locale per } f. \end{cases}$$

   (f) Studio del segno di f (zeri): dallo studio della monotonia e dei limiti, si ha che esiste $\alpha > 1$ tale che

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > \alpha \\ = 0 & \text{per } x = 1 \text{ e } x = \alpha \\ < 0 & \text{per } 0 < x < 1 \text{ e } 1 < x < \alpha\,. \end{cases}$$

   In corrispondenza dei punti $x = 1$ e $x = \alpha$ la funzione ha degli zeri.

(g) Grafico: il grafico della funzione è



(h) Polinomio di Taylor: si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-2}{(1+(x-1)^2)^2}\,, \qquad D(f'') = D(f) = (0,+\infty)\,.$$

Quindi, si ha $f(1) = f'(1) = 0$ e $f''(1) = -1$. Di conseguenza, il polinomio di Taylor richiesto è

$$T(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}\,f''(1)(x-1)^2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

Equivalentemente, si possono utilizzare gli sviluppi delle funzioni elementari. Ricordando che la funzione arcotangente è dispari, per $x \to 1$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x - \operatorname{artg}(x-1) \\ &= \ln(1+(x-1)) - \operatorname{artg}(x-1) \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) - (x-1) + o((x-1)^2) \\ &= -\frac{}{2}\,(x-1)^2 + o((x-1)^2)\,. \end{aligned}$$

Si ritrova così il risultato precedente.

3. (a) La funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0,+\infty)$. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Iniziamo a studiare il comportamento della funzione integranda per $x \to +\infty$. Per $\beta > 0$, la funzione non presenta singolarità sull'intervallo $(0,+\infty)$ e per $x > 0$ abbastanza grande si ha

$$x^2 \mathrm{e}^{-x^\beta} \leq \frac{1}{x^2}\,.$$

Di conseguenza, la funzione integranda è integrabile a $+\infty$ (per il criterio del confronto) e quindi l'integrale è convergente.
Per $\beta \leq 0$, abbiamo invece che

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^\beta} = +\infty$$

e quindi l'integrale risulta divergente.
In conclusione, l'integrale I converge se e solo se $\beta > 0$.

(b) Integrando per parti due volte, si ha

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-x}(x^2 + x + 1) + c$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x &= \lim_{a \to +\infty} \int_0^a x^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{a \to +\infty} \big[-2\mathrm{e}^{-x}(x^2 + x + 1) \big]_0^a = \lim_{a \to +\infty} (-2\mathrm{e}^{-a}(a^2 + a + 1) + 2) = 2\,.\end{aligned}$$

4. (a) Dalle equazioni della curva, si ricava

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} + 1 \\ z = \dfrac{1}{t} - t \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} t = x \\ \dfrac{1}{t} = y - 1 \\ z = y - 1 - x\,. \end{cases}$$

Pertanto, la curva è piana ed è contenuta nel piano di equazione $x - y + z + 1 = 0$.

(b) Sia f la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ. Allora, si ha

$$f'(t) = \left(1, -\frac{1}{t^2}, -1 - \frac{1}{t^2}\right), \quad f''(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right) \quad \text{e} \quad f'(t) \wedge f''(t) = \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right).$$

Pertanto, si ha

$$||f'(t)|| = \sqrt{2 + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}} = \frac{\sqrt{2(1 + t^2 + t^4)}}{t^2} \qquad \text{e} \qquad ||f'(t) \wedge f''(t)|| = \frac{2\sqrt{3}}{t^3}$$

e quindi

$$\kappa(t) = \frac{||f'(t) \wedge f''(t)||}{||f'(t)||^3} = \frac{2\sqrt{3}}{t^3} \frac{t^6}{2\sqrt{2}(1 + t^2 + t^4)^{3/2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{t^3}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}\,.$$