POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE

ANALISI E GEOMETRIA 1 *Primo compito in itinere – 6 Novembre 2018*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

T.1: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

1. (a) Mostrare che l'equazione

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(z^2+\frac{4}{z}\right) = \mathrm{i}\,|z|\cdot\bar{z} \qquad (1)$$

ha le stesse soluzioni dell'equazione

$$z^3 = -4+4\sqrt{3}i \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\,. \qquad (2)$$

   (b) Determinare le soluzioni dell'equazione (2).

   (c) Dire quali delle soluzioni trovate appartengono all'insieme $E=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \operatorname{Re} z\geq \operatorname{Im} z\}$.

2. Sia $f: D\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+1} - x\mathrm{e}^{x}\,.$$

   (a) Determinare l'insieme di definizione D e gli eventuali asintoti di f.

   (b) Calcolare la derivata prima di f. Determinare gli insiemi di monotonìa e i punti di estremo relativo di f.

   (c) Calcolare la derivata seconda di f. Determinare gli insiemi di concavità e di convessità, e gli eventuali punti di flesso di f.

   (d) Determinare $\operatorname{Im} f$. Calcolare $\sup_D f$ e $\inf_D f$, specificando se si ha un massimo e un minimo assoluto, rispettivamente.

   (e) Stabilire se la funzione $f:[0,\mathrm{e}]\to Y$, con $Y=f([0,\mathrm{e}])$, è invertibile. Analogamente, stabilire se la funzione $f:[\mathrm{e},+\infty)\to Z$, con $Z=f([\mathrm{e},+\infty))$, è invertibile.

   (f) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

Teoria

1. (a) Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili.
   (b) Fornire un esempio di funzione monotòna in un intervallo che non è derivabile in almeno un punto dell'intervallo.

.

Soluzioni

1. (a) Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione (1) per z e tenendo conto che $z\bar{z} = |z|^2$, si ottiene

$$z^3 = -4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|z|^3\,\mathrm{i} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,. \tag{3}$$

Poiché $\operatorname{Re}(z^3) = -4$ e $\operatorname{Im}(z^3) = \frac{\sqrt{3}}{2}|z|^3$, dalla (3) si ha

$$|z^3| = \sqrt{16 + \frac{3}{4}|z|^6} \qquad \text{ossia} \qquad |z|^6 = 16 + \frac{3}{4}|z|^6 \qquad \text{ossia} \qquad |z|^6 = 4^3 = 2^6$$

da cui si ha $|z| = 2$. Pertanto, l'equazione (3) si riduce all'equazione (2).

(b) Poiché

$$z^3 = 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right) = 8\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

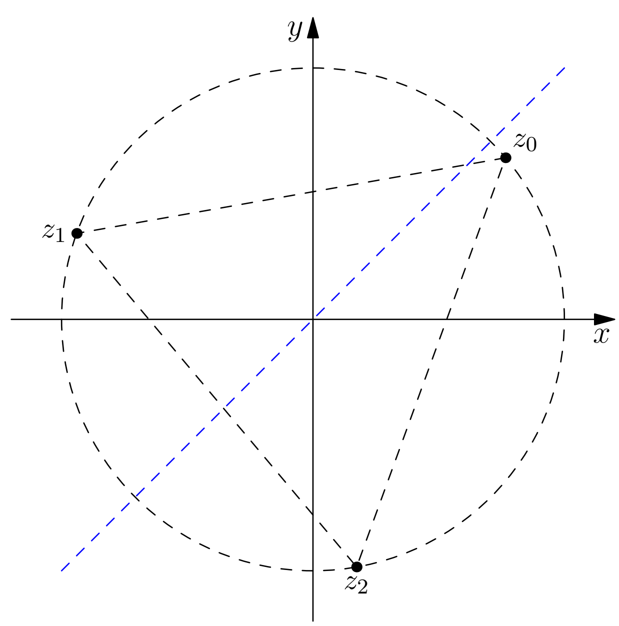
si hanno le tre soluzioni

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2\pi + 6k\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi + 6k\pi}{9}\right) \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

ossia

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right) \\ z_1 &= 2\left(\cos\frac{8\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{9}\right) \\ z_2 &= 2\left(\cos\frac{14\pi}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

(c) l'insieme E coincide con il semipiano definito dall'equazione $y \le x$. Pertanto, poiché



si ha $z_0, z_2 \in E$.

2. (a) La funzione f è definita e continua in $D = \mathbb{R}$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Inoltre, f non ha asintoti verticali, né asintoti per $x \to +\infty$.

(b) La funzione è derivabile su tutto D e $f'(x) = (\mathrm{e} - 1 - x)\mathrm{e}^x$ per ogni $x \in D$. Pertanto, si ha

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \forall\, x \in (\mathrm{e}-1, +\infty) \\ f'(x) = 0 & \text{per } x = \mathrm{e}-1 \\ f'(x) > 0 & \forall\, x \in (-\infty, \mathrm{e}-1)\,. \end{array}$$

Dunque f è strettamente decrescente in $(\mathrm{e}-1, +\infty)$, mentre è strettamente crescente in $(-\infty, \mathrm{e}-1)$. Inoltre, $x = \mathrm{e}-1$ è un punto di massimo relativo, e $f(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}$ è un (valore) massimo relativo.

(c) Risulta $f''(x) = (\mathrm{e} - 2 - x)\mathrm{e}^x$ per ogni $x \in D$. Pertanto, si ha

$$\begin{array}{ll} f''(x) < 0 & \forall\, x \in (\mathrm{e}-2, +\infty) \\ f''(x) = 0 & \text{per } x = \mathrm{e}-2 \\ f''(x) > 0 & \forall\, x \in (-\infty, \mathrm{e}-2)\,. \end{array}$$

Dunque f è concava in $(\mathrm{e}-2, +\infty)$, mentre è convessa in $(-\infty, \mathrm{e}-2)$. Inoltre, $x = \mathrm{e}-2$ è un punto di flesso.

(d) Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, in $x = \mathrm{e}-1$ si ha un punto di massimo assoluto. Inoltre, essendo f è continua in D, per il teorema dei valori intermedi, si ha che $\operatorname{Im} f = (-\infty, \mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}]$. Di conseguenza $\sup_D f = \max_D f = \mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}$ e $\inf_D f = -\infty$ (in $\mathbb{R}^*$), ossia f è inferiormente illimitata (e quindi non ha minimo assoluto).

(e) Le due funzioni date sono entrambe continue e suriettive (per definizione). Si tratta quindi di stabilire se sono iniettive, o, equivalentemente, se sono strettamente monotone. La funzione $f : [0, \mathrm{e}] \to Y$ cresce e decresce; quindi non è iniettiva, né invertibile. Invece, la funzione $f : [\mathrm{e}, +\infty) \to Z$ è strettamente decrescente e, quindi, è invertibile.

(f) Il grafico qualitativo di f è