Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 *Secondo compito in itinere – 14 Gennaio 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**Es.1**: 5 punti	**Es.2**: 7 punti	**Totale**

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' - \frac{y}{x-3} = f(x)$$

con $x > 3$.

   (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione quando $f(x) = 0$.

   (b) Determinare l'integrale generale dell'equazione quando $f(x) = x$.

   (c) Determinare la soluzione $\widetilde{y}(x)$ dell'equazione con $f(x) = x$ che soddisfa la condizione $y(4) = 4$.

   (d) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $\widetilde{y}(x)$ centrato in $x = 4$ e disegnare l'andamento locale della funzione.

2. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \theta + \cos^2\theta \\ y = \theta + \sin^2\theta \\ z = \sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

   (a) Mostrare che γ è biregolare nel punto P che si ottiene per $\theta = 0$.

   (b) Determinare la terna intrinseca di γ in P.

   (c) Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)\, z \, \mathrm{d}s$$

   dove Γ è il tratto della curva γ che si ottiene per $\theta \in [0, 2\pi]$.

   (d) Stabilire se esistono dei punti di γ in cui il vettore velocità e il vettore accelerazione sono ortogonali.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

Teoria

1. Dare la definizione di prodotto scalare e di norma per vettori di $\mathbb{R}^n$.
2. Enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dimostrarla.

.

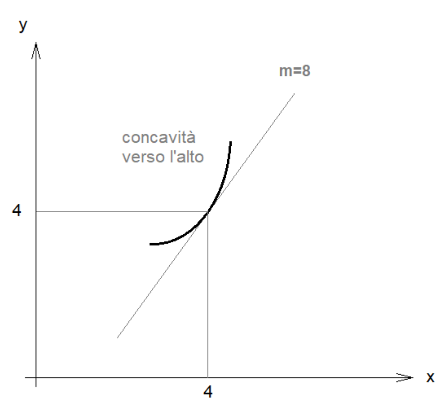
1. L'equazione lineare data è lineare per ogni f.

   (a) Per $f(x) = 0$, essendo $x > 3$, si ha
   $$y(x) = c\,\mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}} = c\,\mathrm{e}^{\ln(x-3)} = c\,(x-3) \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Per $f(x) = x$, essendo $x > 3$, si ha
   $$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}} \left[\int x\,\mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}} \mathrm{d}x + c \right] = \mathrm{e}^{\ln(x-3)} \left[\int x\,\mathrm{e}^{-\ln(x-3)} \mathrm{d}x + c \right] \\ &= (x-3) \left[\int \frac{x}{x-3}\,\mathrm{d}x + c \right] = (x-3) \left[\int \left(1 + \frac{3}{x-3}\right) \mathrm{d}x + c \right] \\ &= (x-3)\,[x + 3\ln(x-3) + c] \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   (c) Imponendo la condizione $y(4) = 4$, si ottiene $c = 0$. Quindi, la soluzione del problema di Cauchy è
   $$\widetilde{y}(x) = (x-3)(x + 3\ln(x-3))\,.$$

   (d) Si ha
   $$\begin{aligned} \widetilde{y}'(x) &= 2x + 3\ln(x-3) \\ \widetilde{y}''(x) &= 2 + \frac{3}{x-3} \end{aligned}$$
   e quindi
   $$\widetilde{y}(4) = 4\,, \qquad \widetilde{y}'(4) = 8\,, \qquad \widetilde{y}''(4) = 5\,.$$
   In conclusione, lo sviluppo richiesto è
   $$\widetilde{y}(x) = 4 + 8\,(x-4) + \frac{5}{2}(x-4)^2 + o\left((x-4)^2\right) \qquad x \to 4\,.$$
   Infine, il grafico dell'andamento locale è



2. (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia la funzione definita da
   $$f(\theta) = \left(\theta + \cos^2\theta, \theta + \sin^2\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta\right).$$

Poiché

$$\begin{cases} x' = 1 - 2\cos\theta\sin\theta = 1 - \sin 2\theta \\ y' = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta \\ z' = \sqrt{2}\cos 2\theta \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = -2\cos 2\theta \\ y'' = 2\cos 2\theta \\ z'' = -2\sqrt{2}\sin 2\theta\,, \end{cases}$$

si ha $P = f(0) = (1,0,0)\,,\ f'(0) = (1,1,\sqrt{2})\,,\ f''(0) = (-2,2,0)\,.$ Quindi si ha

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$$

e

$$\|f'(0)\| = 2 \qquad \text{e} \qquad \|f'(0) \wedge f''(0)\| = 4\sqrt{2}\,.$$

Poiché la funzione f è derivabile due volte in $\theta = 0$ e $\|f'(0) \wedge f''(0)\| \neq 0$, la curva γ è biregolare in P.

(b) La terna intrinseca di γ in P è

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1,1,\sqrt{2})}{2} \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(-1,-1,\sqrt{2})}{2} \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

(c) Poiché

$$\|f'(\theta)\| = \sqrt{2 + 2\sin^2 2\theta + 2\cos^2 2\theta} = 2\,,$$

la curva Γ è regolare, e

$$\begin{aligned} I &= \int_\Gamma (x-y)(x+y)\,z\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin 2\theta\,\|f'(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta\cos 2\theta\,(2\theta+1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \sin 4\theta\,(2\theta+1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} (2\theta\sin 4\theta + \sin 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Integrando per parti, si ha

$$\int \theta\sin 4\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\theta}{4}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\int\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\theta}{4}\cos 4\theta + \frac{1}{16}\sin 4\theta\,.$$

Quindi, si ha

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{\theta}{2}\cos 4\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta - \frac{1}{4}\cos 4\theta\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

(d) Poiché $\mathbf{v} = f'(\theta)$ e $\mathbf{a} = f''(\theta)$, si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle = -2\cos 2\theta(1 - \sin 2\theta) + 2\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta) - 4\sin 2\theta\cos 2\theta = 0\,.$$

Quindi, i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ sono ortogonali in ogni punto di γ, ossia in ogni punto di γ vi è solo l'accelerazione centripeta (ma non l'accelerazione tangenziale).