Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Primo Appello – 4 Febbraio 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 5 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

Teoria

1. (a) Dare la definizione di funzione continua in un punto.
   (b) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto.
   (c) Dimostrare che una funzione derivabile in un punto è continua in quel punto.
2. (a) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
   (b) Mostrare con un esempio che il teorema non vale se la funzione non è continua in un punto.

Esercizi

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \operatorname{artg} x}.$$

2. Studiare la funzione f definita da $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x - x)$.

   (Dominio, segno, limiti agli estremi, asintoti, derivata prima, segno della derivata prima, estremanti, derivata seconda, segno della derivata seconda, concavità e flessi, grafico.)

3. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2 \ln(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x.$$

4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$

   (a) Dimostrare che r ed s sono incidenti e determinare il loro punto di intersezione P.
   (b) Calcolare l'angolo formato dalle direzioni di r e s.
   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
   (d) Calcolare la distanza dell'origine O dal piano π.

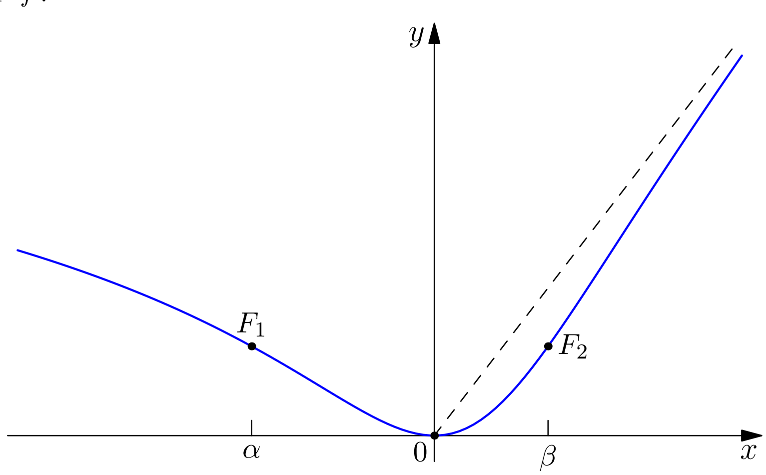
Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

Soluzioni

1. Per $x \to 0$, si ha
$$\mathrm{e}^x - 1 - x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\sin x - \operatorname{artg} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}\,.$$
Di conseguenza, abbiamo
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\mathrm{e}^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \operatorname{artg} x} = \frac{6}{2^\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{2\alpha - 3} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \\ 0 & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. (a) Dominio di f: Poiché $\mathrm{e}^x > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $D(f) = \mathbb{R}$.
   (b) Studio del segno di f: si ha $f(x) \geq 0$ sse $\ln(\mathrm{e}^x - x) \geq 0$ sse $\mathrm{e}^x - x \geq 1$ sse $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$. Quindi, si ha $f(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$.
   (c) Limiti agli estremi: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (d) Eventuali asintoti: la retta di equazione $y = x$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Per $x \to -\infty$ la funzione non ha asintoti.
   (e) Derivata prima:
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (f) Studio del segno di f': $f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f'(x) = 0$ per $x = 0$.
   (g) Estremanti di f: f ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$. Non esistono massimi assoluti.
   (h) Derivata seconda:
$$f''(x) = -\frac{(x-2)\mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (i) Studio del segno di f'': Studiando (per confronto grafico) la diseguaglianza $\mathrm{e}^{-x} > 2 - x$, si deduce l'esistenza di due valori $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ tali che $f''(x) > 0$ in (α, β), $f''(x) < 0$ in $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ e $f''(x) = 0$ per $x = \alpha, \beta$.
   (j) Concavità: $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso per f.
   (k) Grafico di f:



3. La funzione integranda f è definita, continua e non negativa su tutto l'intervallo di integrazione $(0, +\infty)$. Possiamo quindi scrivere

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

e studiare separatamente i due integrali a secondo membro, il primo in un intorno destro di zero e il secondo all'infinito.

Per $x \to 0^+$, si ha

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}\,x^2 \qquad \text{e} \qquad \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x} = x^{1/2}$$

e quindi

$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^{2+1/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{1/2}}\,.$$

Poiché la funzione $\frac{1}{x^{1/2}}$ è integrabile in un intorno destro di 0, anche la funzione f lo è (per il criterio del confronto asintotico).

Per $x \to +\infty$, essendo

$$1 - \cos x \leq 2 \qquad \text{e} \quad \ln(1+\sqrt{x}) \geq \ln 2 \qquad \forall x \geq 1\,,$$

vale la maggiorazione

$$f(x) \leq \frac{2}{\ln 2}\,\frac{1}{x^2} \qquad \forall x \geq 1\,.$$

Poiché la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile a $+\infty$, anche la funzione f lo è (per il criterio del confronto).

In conclusione, l'integrale I è convergente.

4. (a) Per intersecare le rette r ed s, sostituiamo le coordinate del genreico punto di r nelle equazioni cartesiane di s. Si ha il sistema

$$\begin{cases} 2t - 3t + 1 + 3(t+2) - 5 = 0 \\ 2t - (-3t+1) + t + 2 + 5 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2t + 2 = 0 \\ 6t + 6 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $t = -1$. Pertanto, le due rette sono incidenti e il loro punto di intersezione è $P \equiv (-2, 4, 1)$.

(b) dalle equazioni paramertiche di r si ha immediatamente che un suo vettore direttore è $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$. Determiniamo ora le equazioni parametriche di s:

$$s : \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -2z \\ y = x + z + 5 = -z + 5 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -2s \\ y = -s + 5 \\ z = s\,. \end{cases}$$

Pertanto, un vettore direttore di s è $\mathbf{b} = (-2, -1, 1)$. Quindi, essendo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, le due rette sono ortogonali, e l'angolo che formano è $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(c) La direzione ortogonale ad entrambe le rette r ed s è data dal vettore

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -4, -8) = -2(1, 2, 4)\,.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di π è

$$(x+2) + 2(y-4) + 4(z-1) = 0$$

ossia $\pi\ :\ x + 2y + 4z - 10 = 0$.

(d) La distanza dell'origine dal piano π è

$$\mathbf{d}(O,\pi) = \frac{|-10|}{\sqrt{1+2^2+4^2}} = \frac{10}{\sqrt{21}}\,.$$