Analisi e Geometria 1 *Secondo Appello – 14 Giugno 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 8 punti	**Es.2**: 5 punti	**Es.3**: 7 punti	**Es.4**: 4 punti	**Totale**

Teoria

1. (a) Dare la definizione di successione convergente.
   (b) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per le successioni.

2. (a) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.
   (b) Mostrare con un esempio che se una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non è derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$, allora il teorema di Lagrange può non valere.

Esercizi

1. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

   (a) Determinare il segno e le eventuali simmetrie di F.
   (b) Determinare gli eventuali asintoti di F.
   (c) Determinare gli eventuali punti estremanti e di flesso di F.
   (d) Disegnare il grafico qualitativo di F.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \cos(\mathrm{e}^x - 1)$.
   (a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine di f.
   (b) Stabilire se f possiede un punto di massimo o di minimo per $x = 0$.
   (c) Calcolare

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{(f(x)-1)^2}{(\cos x - \mathrm{e}^x + x)\sin x^2}\,.$$

3. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 6 + kt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = k - 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = -4 + kt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) Determinare i valori del parametro reale k per i quali r ed s sono ortogonali.
   (b) i. Per i valori di k trovati, stabilire la posizione reciproca di r ed s.
   ii. Nel caso in cui siano sghembe, determinare la distanza tra r ed s.

4. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 \sin t \\ y = t^2 \cos t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in [-1,1]\,.$$

   (a) Calcolare la lunghezza di γ.
   (b) Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma xyz^2 \mathrm{d}s\,.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

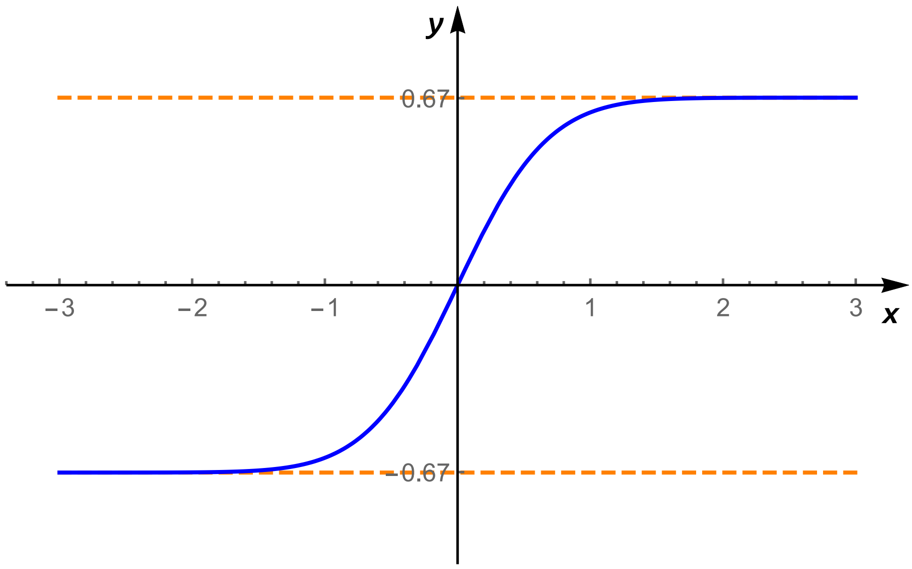
Soluzioni

1. (a) Poiché la funzione integranda $f(t) = \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}$ è positiva, si ha: $F(0) = 0$, $F(x) > 0$ per $x > 0$ e $F(x) < 0$ per $x < 0$. Inoltre, essendo f pari, F è dispari.

   (b) Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt\,.$$
   Poiché la funzione f è continua e positiva su tutto $\mathbb{R}$, e poiché per $x \to +\infty$ si ha
$$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} \sim \frac{e^{-t^2}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{(definitivamente)}\,,$$
   la funzione f è integrabile in senso improprio a $+\infty$ (per i criteri del confronto asintotico e semplice). Quindi l'integrale improprio considerato converge e la funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Per simmetria, le funzione F ha un asintoto orizzontale anche per $x \to -\infty$. Non ci sono altri asintoti.

   (c) Si ha
$$F'(x) = f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} > 0 \qquad \text{e} \qquad F''(x) = f'(x) = -\frac{2x(2+x^2)e^{-x^2}}{(1+x^2)^2}\,.$$
   Quindi la funzione F è strettamente crescente e non possiede punti di massimo o di minimo, mentre possiede un punto di flesso per $x = 0$. In particolare, la concavità è rivolta verso l'alto per $x < 0$ ed è rivolta verso il basso per $x > 0$.

   (d) Il grafico qualitativo di F è



2. (a) Poiché
$$\begin{aligned} &f(x) = \cos(e^x - 1) && f(0) = 1 \\ &f'(x) = -e^x \sin(e^x - 1) && f'(0) = 0 \\ &f''(x) = -e^x \sin(e^x - 1) - e^{2x}\cos(e^x - 1) && f''(0) = -1\,, \end{aligned}$$
   lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine di f è
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + 0(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to +\infty\,.$$

   (b) Essendo $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$, la funzione f possiede un punto di massimo per $x = 0$.

(c) Poiché, per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned}
&(f(x)-1)^2 = \Big(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^4)\\
&\cos x - \mathrm{e}^x + x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x = -x^2+o(x^2)\\
&\sin x^2 = x^2+o(x^2)\,,
\end{aligned}$$

si ha

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{(-x^2+o(x^2))(x^2+o(x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}+o(1)}{(-1+o(1))(1+o(1))} = -\frac{1}{4}\,.$$

3. (a) Un vettore direttore di r è $\mathbf{a} = (3,-4,k)$, mentre un vettore direttore di s è $\mathbf{b} = (-3,4,k)$. Pertanto, r ed s sono ortogonali se e solo se $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = 0$, ossia se e solo se $k = \pm 5$.

   (b) i. L'intersezione delle due rette è data dal sistema (dove abbiamo cambiato il nome del parametro di s)

$$\begin{cases} 5+3t = k-3u \\ 1-4t = 1+4u \\ 6+kt = -4+ku \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 5+3t = k+3t \\ -t = u \\ 6+kt = -4-kt \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 5 = k \\ -t = u \\ t = -1\,. \end{cases}$$

   Di conseguenza, per $k = 5$ le due rette sono incidenti nel punto $P \equiv (2,5,1)$, mentre per $k=-5$ le due rette sono sghembe.

   ii. Le rette r ed s sono sghembe per $k=-5$. In questo caso, i vettori direttori delle due rette sono $\mathbf{a} = (3,-4,-5)$ e $\mathbf{b} = (-3,4,-5)$. La direzione ortogonale a entrambe le rette è individuata dal vettore $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 10(4,3,0)$. Quindi, il piano π passante per s e ortogonale a entrambe le rette può essere visto come il piano passante per il punto $Q \equiv (-5,1,-4) \in s$ (ottenuto per $t=0$) e avante parametri direttori $(4:3:0)$. Così, si ha

$$\pi \;:\; 4(x+5)+3(y-1)+0(z+4) = 0$$

   ossia $\pi \;:\; 4x+3y+17=0$. La distanza tra r ed s coincide con la distanza tra il punto $P \equiv (5,1,6) \in r$ (ottenuto per $t=0$) e il piano π, ossia

$$d(r,s) = d(P,\pi) = \frac{|20+3+17|}{\sqrt{16+9}} = 8\,.$$

4. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza γ.

   (a) Si ha

$$\begin{cases} x' = 2t\sin t + t^2\cos t \\ y' = 2t\cos t - t^2\sin t \\ z' = 2 \end{cases}$$

   e

$$\|f'(t)\| = \sqrt{4+4t^2+t^4} = 2+t^2\,.$$

   Pertanto γ è una curva regolare e

$$L(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_{-1}^{1}\|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(2+t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{14}{3}\,.$$

   (b) L'integrale di linea richiesto è

$$I = \int_\gamma xyz^2\mathrm{d}s = 16\int_{-1}^{1} t^6(2+t^2)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\,.$$

   Poiché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ha $I = 0$.