Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1

Terzo Appello – 15 Luglio 2019

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 11 punti	**Es.3**: 4 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

Teoria

1. Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per vettori di $\mathbb{R}^n$.
2. (a) Definire i versori della terna intrinseca di una curva biregolare.
   (b) Scrivere le formule di Frenet-Serret.

Esercizi

1. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione
$$\frac{z^3+1}{z^3-1} = \frac{1}{\mathrm{i}}$$
scrivendo le soluzioni in forma algebrica.

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \sqrt[3]{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$
   (a) Determinare il dominio di f .
   (b) Determinare il segno di f .
   (c) Determinare gli eventuali asintoti di f .
   (d) Calcolare la derivata prima di f e studiarne il segno. Determinare i massimi e i minimi locali e globali di f .
   (e) Calcolare la derivata seconda di f e studiarne il segno. Determinare gli insiemi di convessità e di concavità di f , e gli eventuali punti di flesso.
   (f) Disegnare il grafico qualitativo di f .

3. (a) Trovare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 della funzione
$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}.$$
   (b) Sfruttare il polinomio precedente per trovare un valore razionale che approssima $\ln 2$.

4. Sia N_0 il numero di batteri presenti in una coltura al tempo $t=0$. Sia $y=y(t)$ la popolazione batterica all'istante t .
   (a) Se il cibo e lo spazio sono illimitati e la variazione della popolazione è proporzionale alla popolazione stessa $y(t)$, si ha
$$y' = ky\,, \qquad y(0) = N_0,$$
   dove $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, è il coefficiente di accrescimento relativo.
   (b) Se le risorse sono scarse (cibo e spazio limitati, con un numero massimo M di individui ammissibili) e se la variazione della popolazione cresce a ogni istante con tasso proporzionale alla popolazione stessa $y(t)$ e alla differenza $M - y(t)$, si ha
$$y' = ky(M-y), \qquad y(0) = N_0\,.$$

   In entrambe le situazioni, risolvere il problema di Cauchy e trovare il comportamento della popolazione per $t \to +\infty$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

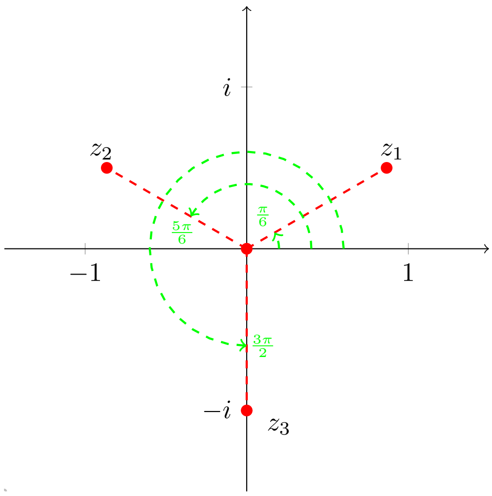
Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

---

1. L'equazione può essere riscritta come

$$z^3+1=-\mathrm{i}(z^3-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1+\mathrm{i})\,z^3=\mathrm{i}-1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^3=\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}-1}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$$

le cui soluzioni sono sulla circonferenza di raggio 1 e hanno argomento $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$:



La forma algebrica delle soluzioni è

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}, \qquad z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}, \qquad z_3=-\mathrm{i}.$$

2. (a) La funzione f ha dominio $\mathbb{R}$.
   (b) Il segno della funzione dipende dal termine $1-\mathrm{e}^{-x}$. Il segno di f è quindi pari al segno di x, in particolare c'è un solo zero (l'origine).
   (c) Calcoliamo i limiti agli estremi del domino. Per $x\to-\infty$:

$$\begin{aligned} 1-\mathrm{e}^{-x} &\sim -\mathrm{e}^{-x}\\ (1-\mathrm{e}^{-x})^{1/3} &\sim -\mathrm{e}^{-x/3}\\ (1-\mathrm{e}^{-x})^{1/3} &= -\mathrm{e}^{-x/3}+o(\mathrm{e}^{-x/3})\\ \mathrm{e}^{x}\cdot(1-\mathrm{e}^{-x})^{1/3} &= -\mathrm{e}^{2x/3}+o(\mathrm{e}^{2x/3})\longrightarrow 0^-. \end{aligned}$$

   L'asse x è quindi asintoto orizzontale.
   Per $x\to+\infty$: $f(x)\sim e^x\to+\infty$ (senza asintoto).
   (d) La derivata prima è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{x}\cdot\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^{-x}}+\mathrm{e}^{x}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^{-2/3}\cdot\mathrm{e}^{-x}\\ &= \mathrm{e}^{x}\cdot\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{3\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2/3}}\\ &= \frac{3\mathrm{e}^{x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)+1}{3\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2/3}}\\ &= \frac{3\mathrm{e}^{x}-2}{3\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2/3}}. \end{aligned}$$

   La derivata prima non esiste nell'origine (flesso a tangente verticale) e ha il segno del termine $3\mathrm{e}^x-2$. In particolare il punto $x^*=\ln\frac{2}{3}$ è punto di minimo locale e globale, dove la funzione assume il valore

$$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

(e) La derivata seconda è

$$f''(x) \quad = \quad \frac{3\mathrm{e}^{x} \cdot 3\,(1-\mathrm{e}^{-x})^{2/3} - (3\mathrm{e}^{x}-2)\cdot 2(1-\mathrm{e}^{-x})^{-1/3}\mathrm{e}^{-x}}{9\,(1-\mathrm{e}^{-x})^{4/3}}.$$

Il segno della derivata seconda dipende dal segno del suo numeratore

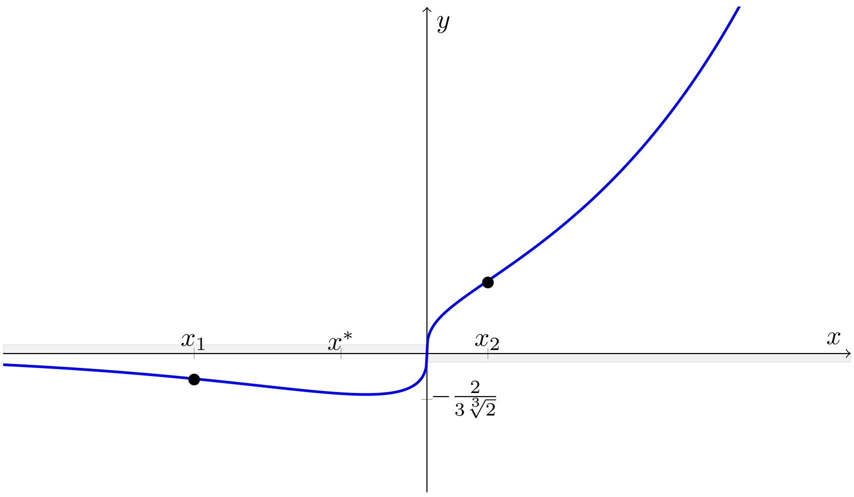
$$9\mathrm{e}^{x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2/3} - \frac{2(3\mathrm{e}^{x}-2)}{\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{1/3}} = \frac{9\mathrm{e}^{2x}(1-\mathrm{e}^{-x}) - 6\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{1/3}} = \frac{9\mathrm{e}^{2x}-15\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{1/3}}.$$

Poiché le radici dell'equazione quadratica $9w^2 - 15w + 4 = 0$ sono

$$w_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4^2\cdot 9}}{18} = \frac{1}{3}, \frac{4}{3},$$

i punti di cambio di concavità cercati sono $x_1 = \ln\frac{1}{3}$ e $x_2 = \ln\frac{4}{3}$.

(f) Il grafico di f è



3. (a) Poiché

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{1+x}{1-x} & \qquad f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1-x^2} & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= \frac{4x}{(1-x^2)^2} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 4\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3} & f'''(0) &= 4\,, \end{aligned}$$

si ha

$$T_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3\,.$$

Equivalentemente, si ha

$$f(x) = \ln\frac{1}{1-x} + \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\,.$$

(b) Per approssimare $\ln 2$ mediante la funzione $\ln\frac{1+x}{1-x}$, deve essere

$$\frac{1+x}{1-x} = 2$$

da cui si ricava $x = \frac{1}{3}$. Il valore approssimato, pertanto, è

$$T_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{56}{81}\,.$$

4. (a) L'equazione differenziale è lineare. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = N_0 e^{kt}.$$

Quindi, essendo $k > 0$, si ha $y(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

(b) In questo caso, l'equazione differenziale è a variabili separabili. Essa ha per soluzioni i valori costanti $y = 0$ e $y = M$. Inoltre, se $y \neq 0, M$, si ha

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{y}{M - y} \right| = kt + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

ovvero

$$y(t) = \frac{MDe^{Mkt}}{1 + De^{Mkt}} \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale, si trova la soluzione

$$y(t) = \frac{MN_0 e^{Mkt}}{M - N_0 + N_0 e^{Mkt}}.$$

Infine, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = M.$$