Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Quarto Appello – 12 Settembre 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**T.2**: 4 punti	**Es.1**: 6 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 4 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

Teoria

1. (a) Dare la definizione di numero irrazionale.
   (b) Dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.
   (c) Stabilire se $1+\sqrt{2}$ è irrazionale.
2. (a) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi.
   (b) Mostrare con un esempio che tale teorema può non valere per funzioni discontinue.

Esercizi

1. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^3-(1-2\mathrm{i})\,z^2-(2+\mathrm{i}(2+\sqrt{3}))\,z+2+\mathrm{i}\sqrt{3}=0$$

(suggerimento: l'equazione ammette una radice reale di modulo unitario).

2. Si studi la funzione definita da

$$f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo. In particolare, si determini il dominio, gli asintoti, i massimi e i minimi (se presenti), i flessi (se presenti) e la concavità.

3. Calcolare l'integrale

$$I=\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x(\ln x-4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

4. (a) Scrivere l'equazione del piano π che passa per i tre punti $A\equiv(1,2,1)$, $B\equiv(2,1,1)$ e $C\equiv(1,1,3)$ dello spazio ordinario.
   (b) Scrivere le equazioni (parametriche e cartesiane) della retta r perpendicolare al piano π e passante per il punto $P\equiv(3,3,3)$.
   (c) Determinare la distanza tra il punto $Q\equiv(3,-5,7)$ e la retta r.
   (d) Determinare i valori dei parametri reali α e β per i quali la curva

$$\gamma:\begin{cases}x=\alpha(1+t^2)\\ y=2+\alpha t^2\\ z=\beta+t^2\end{cases}$$

è contenuta nel piano π.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

1. L'equazione data si può scomporre nel modo seguente:

$$
\begin{gathered}
z^3 - z^2 + 2\mathrm{i}\, z^2 - 2z - 2\mathrm{i}\, z - \mathrm{i}\sqrt{3}\, z + 2 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \\
z^3 - z^2 + 2\mathrm{i}\, z^2 - 2\mathrm{i}\, z - 2z + 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}\, z + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \\
z^2(z-1) + 2\mathrm{i}\, z(z-1) - 2(z-1) - \mathrm{i}\sqrt{3}(z-1) = 0 \\
(z^2 + 2\mathrm{i}\, z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3})(z-1) = 0\,.
\end{gathered}
$$

Pertanto, $z_1 = 1$ è la soluzione reale con modulo unitario. Si tratta ora di risolvere l'equazione di secondo grado $z^2 + 2\mathrm{i}\, z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$. Possiamo applicare direttamente la formula che dà le radici, ottenendo

$$z_{2,3} = -\mathrm{i} \pm \sqrt{\mathrm{i}^2 + 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = -\mathrm{i} \pm \sqrt{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}\,.$$

Ora osserviamo che

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = \frac{2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + \mathrm{i}^2}{2} = \frac{(\sqrt{3} + \mathrm{i})^2}{2}\,.$$

Quindi, si ha

$$z_{2,3} = -\mathrm{i} \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + \mathrm{i})^2}{2}} = -\mathrm{i} \pm \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

ossia

$$
\begin{aligned}
z_2 &= -\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \\
z_3 &= -\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Equivalentemente, si calcolano le due radici quadrate di $1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ e si ottengono le due soluzioni:

$$
\begin{aligned}
z_2 &= -\mathrm{i} + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = -\mathrm{i} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \\
z_3 &= -\mathrm{i} + \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\mathrm{i} + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)\,.
\end{aligned}
$$

2. (a) Poiché $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$, la funzione è pari. Questo ci permette di studiare la funzione solo per $x \geq 0$.
   (b) Per $x \geq 0$, la funzione esiste quando $x^2 - x \geq 0$, ossia per $x = 0$ e per $x \geq 1$. Quindi, il dominio di f è $D = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$.
   (c) Si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$. Quindi, si ha un minimo assolto in ogni punto in cui la funzione si annulla, ossia per $x = \pm 1, 0$.
   (d) Per $x > 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1 - 1/x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - 1/x} = 1$$

e

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1 - 1/x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - 1/x} + 1} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

pertanto, si ha l'asintoto obliquo $y = x - \frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$ e, per simmetria, si ha l'asintoto obliquo $y = -x - \frac{1}{2}$ per $x \to -\infty$. Il grafico di f non ha intersezioni con gli asintoti.

(e) Per $x > 0$, si ha la derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

che è sempre positiva per $x > 1$. Pertanto, la funzione è strettamente crescente. Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = +\infty\,,$$

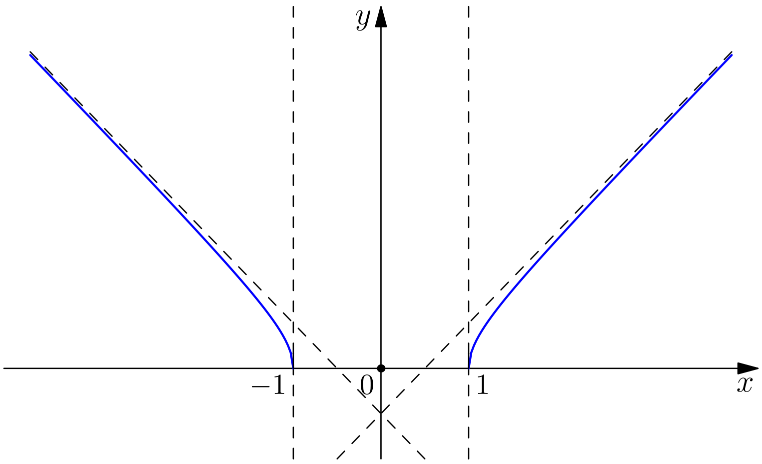
si hanno dei flessi a tangente verticale in $x = -1$ e $x = 1$.

(f) Per $x > 0$, si ha la derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x^2-x)^{3/2}}$$

che è sempre negativa per $x > 1$. La concavità, quindi, è sempre rivolta verso il basso.

(g) Il grafico di f è



3. La funzione integranda è definita per $x > 0$ e $x \neq \mathrm{e}^4$. Quindi I è un integrale proprio.
Posto $t = \ln x - 4$, si ha $x = \mathrm{e}^{t+4}$ e $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{t+4}\,\mathrm{d}t$. Quindi, si ha

$$I = \int_{-4}^{-2} \frac{\mathrm{e}^{t+4}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{t+4}(t+4-4)} = \int_{-4}^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln|t|\big]_{-4}^{-2} = \ln 2 - \ln 4 = -\ln 2\,.$$

Equivalentemente, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)'}{\ln x - 4}\,\mathrm{d}x = \big[\ln|\ln x - 4|\big]_1^{\mathrm{e}^2} = \ln|\ln \mathrm{e}^2 - 4| - \ln|\ln 1 - 4| \\ &= \ln|2-4| - \ln|0-4| = \ln|-2| - \ln|-4| = \ln 2 - \ln 4 = -\ln 2\,. \end{aligned}$$

4. (a) Consideriamo i vettori $\mathbf{x} = B - A = (1,-1,0)$ e $\mathbf{y} = B - C = (1,0,-2)$. Allora un vettore direttore di π è dato da $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (2,2,1)$. Quindi, il piano π ha equazione

$$2(x-1) + 2(y-2) + 1(z-1) = 0$$

ossia $2x + 2y + z - 7 = 0$.

(b) La retta cervata ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t, si hanno le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = y \\ y - 2z + 3 = 0\,. \end{cases}$$

(c) Il piano π' ortogonale alla retta r e passante per il punto Q ha equazione $2x+2y+z-3=0$. Il punto Q' di intersezione tra la retta r e il piano π' si ottiene risolvendo l'equazione

$$2(3+2t)+2(3+2t)+(3+t)-3=0\,.$$

Poiché come soluzione si trova $t=-\frac{4}{3}$, sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di r, si ottiene $Q'\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$. Pertanto, la distanza cercata è

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(Q,r)=\mathbf{d}(Q,Q')&=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-5-\frac{1}{3}\right)^2+\left(7-\frac{5}{3}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{96}{9}+\frac{96}{9}}=\sqrt{\frac{576}{9}}=\sqrt{64}=8\,.\end{aligned}$$

(d) Sostituendo le coordinate del generico punto di γ nell'equazione di π, si ha

$$2\alpha(1+t^2)+2(2+\alpha t^2)+\beta+t^2-7=0$$

ossia

$$2\alpha+\beta-3+(4\alpha+1)\,t^2=0\,.$$

Imponendo che questa equazione sia valida per ogni $t\in\mathbb{R}$, si ricava $\alpha=-\frac{1}{4}$ e $\beta=\frac{7}{2}$.