POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE

ANALISI E GEOMETRIA 1 *Primo compito in itinere – 5 Novembre 2019*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

COMPITO A

PRIMA PARTE

1. Dare la definizione di funzione composta di due funzioni.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di continuità della funzione composta.

SECONDA PARTE

1. Determinare, nel campo complesso, i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, (1+2\mathrm{i})\, z + (1-\mathrm{i})\, \overline{z} + 2 + 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \,:\, w = z^{39},\ z \in A\}\,.$$

2. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1 + 2\,\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,.$$

   (a) Determinare il dominio D e gli asintoti di f.
   (b) Calcolare la derivata prima di f.
   (c) Determinare i punti di massimo e di minimo relativi di f.
   (d) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 \equiv (0, f(0))$.
   (e) Determinare $\operatorname{Im} f$. Stabilire se f è limitata.
   (f) Determinare $Y = f([0,+\infty))$ e stabilire se la funzione $f : [0,+\infty) \to Y$ è invertibile.
   (g) Stabilire se l'equazione $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, \ln 2]$.
   (h) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

---

1. Per determinare l'insieme A bisogna risolvere, nel campo complesso, l'equazione
$$(1+2\mathrm{i})\,z + (1-\mathrm{i})\,\overline{z} + 2 + 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0\,.$$
Posto $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha
$$(1+2\mathrm{i})\,(x+\mathrm{i}y) + (1-\mathrm{i})\,(x-\mathrm{i}y) + 2 + 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0$$
ossia
$$x + \mathrm{i}y + 2\mathrm{i}x - 2y + x - \mathrm{i}y - \mathrm{i}x - y + 2 + 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0$$
ossia
$$(2x - 3y + 2 - 3\sqrt{3}) + \mathrm{i}(x+1) = 0$$
ossia
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 + \sqrt{3} = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$
da cui si ricava $x = -1$ e $y = \sqrt{3}$. Pertanto, l'insieme A è formato solo dal punto $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Di conseguenza, l'insieme B è formato solo dal punto
$$w = z^{39} = (-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{39} = 2^{39}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{39} = 2^{39}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)^{39}.$$
Per la formula di De Moivre, si ha
$$w = 2^{39}\left(\cos 39\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin 39\frac{2}{3}\pi\right) = 2^{39}\left(\cos 26\pi + \mathrm{i}\sin 26\pi\right) = 2^{39}.$$

2. (a) Il dominio di f è $D = \mathbb{R}$. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = 1\,,$$
la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

(b) La derivata prima di f è data da
$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x})}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}\,.$$

(c) Si ha
$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad 1 - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} \geq 0 \\ &\iff \quad \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 1 \leq 0 \\ &\iff \quad \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq \mathrm{e}^x \leq \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff \quad \mathrm{e}^x \leq \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff \quad x \leq \ln\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$
In particolare, si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \ln\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Pertanto, si ha un punto di massimo (assoluto) per $x_0 = \ln\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 0$. Inoltre, il valore massimo di f è
$$f(x_0) = \frac{1+2\,\mathrm{e}^{x_0}}{1+\mathrm{e}^{2x_0}} = \frac{1 + 2\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,.$$

(d) Si ha $P_0 \equiv (0, f(0)) \equiv (0, 2/3)$ e $f'(0) = -1/2$. Pertanto, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto P_0 è

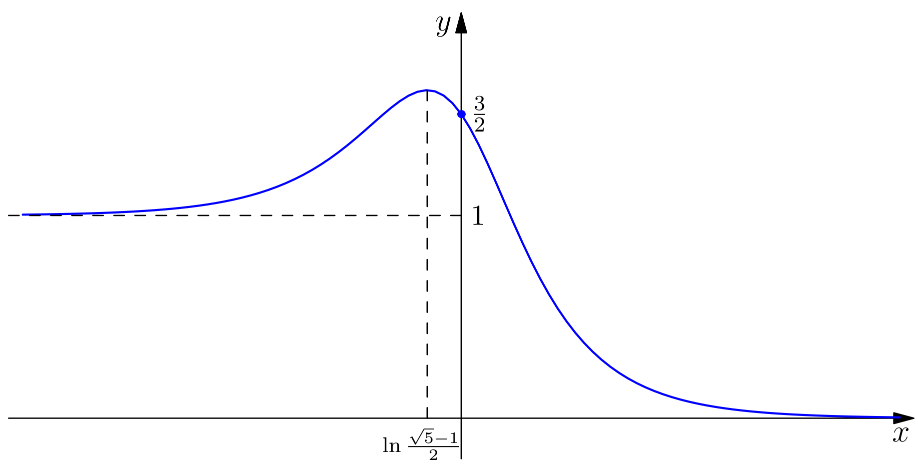
$$y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(x - 0) \qquad \text{ossia} \qquad 3x + 6y - 4 = 0\,.$$

(e) La funzione f assume sempre valori positivi e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Quindi f ammette 0 come estremo inferiore. Inoltre, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e $f(x_0) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$. Quindi f assume in x_0 un punto di massimo assoluto. Essendo continua, f porta intervalli in intervalli. Quindi $\operatorname{Im} f = (0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$. Di conseguenza, f è limitata.

(f) Poiché $f'(x) < 0$ per $x \geq 0$, la funzione f è strettamente decrescente per $x \geq 0$ e quindi $Y = f([0, +\infty)) = (0, 3/2]$. Inoltre, f è iniettiva per $x \geq 0$. Quindi, la funzione $f : [0, +\infty) \to (0, 3/2]$ è iniettiva e suriettiva, ossia è invertibile.

(g) Consideriamo la funzione $F : [0, \ln 2] \to \mathbb{R}$, definita da $F(x) = f(x) - \mathrm{e}^{2x-1}$. La funzione F è continua e $F(0) = 3/2 - \mathrm{e}^{-1} = \frac{3\mathrm{e}-2}{2\mathrm{e}} > 0$ e $F(\ln 2) = 1 - 4\,\mathrm{e}^{-1} = (\mathrm{e} - 4)\,\mathrm{e}^{-1} < 0$ (essendo $2 < \mathrm{e} < 3$). Pertanto, per il teorema degli zeri, la funzione F possiede almeno uno zero nell'intervallo $[0, \ln 2]$, ossia l'equazione $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, \ln 2]$.

(h) Il grafico qualitativo di f è



Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Primo compito in itinere – 5 Novembre 2019*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

T.1: 4 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 8 punti	**Totale**

Compito B

Prima parte

1. Dare la definizione di funzione composta di due funzioni.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di continuità della funzione composta.

Seconda parte

1. Determinare, nel campo complesso, i seguenti insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \;:\; (1+2\mathrm{i})\,z + (1-\mathrm{i})\,\overline{z} + 2 - 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} \;:\; w = z^{39},\; z \in A\}\,.$$

2. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1 - 2\,\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,.$$

   (a) Determinare il dominio D e gli asintoti di f.
   (b) Calcolare la derivata prima di f.
   (c) Determinare i punti di massimo e di minimo relativi di f.
   (d) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 \equiv (0, f(0))$.
   (e) Determinare $\operatorname{Im} f$. Stabilire se f è limitata.
   (f) Determinare $Y = f([0,+\infty))$ e stabilire se la funzione $f : [0,+\infty) \to Y$ è invertibile.
   (g) Stabilire se l'equazione $f(x) + \mathrm{e}^{2x-1} = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, \ln 2]$.
   (h) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

Soluzioni

1. Per determinare l'insieme A bisogna risolvere, nel campo complesso, l'equazione
$$(1+2\mathrm{i})\,z + (1-\mathrm{i})\,\overline{z} + 2 - 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0\,.$$
Posto $z = x + \mathrm{i}y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha
$$(1+2\mathrm{i})\,(x+\mathrm{i}y) + (1-\mathrm{i})\,(x-\mathrm{i}y) + 2 - 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0$$
ossia
$$x + \mathrm{i}y + 2\mathrm{i}x - 2y + x - \mathrm{i}y - \mathrm{i}x - y + 2 - 3\sqrt{3} + \mathrm{i} = 0$$
ossia
$$(2x - 3y + 2 - 3\sqrt{3}) + \mathrm{i}(x+1) = 0$$
ossia
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 - 3\sqrt{3} = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$
da cui si ricava $x = -1$ e $y = -\sqrt{3}$. Pertanto, l'insieme A è formato solo dal punto $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Di conseguenza, l'insieme B è formato solo dal punto
$$w = z^{39} = (-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{39} = -2^{39}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{39} = -2^{39}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{39}.$$
Per la formula di De Moivre, si ha
$$w = -2^{39}\left(\cos 39\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin 39\frac{\pi}{3}\right) = -2^{39}\left(\cos 13\pi + \mathrm{i}\sin 13\pi\right) = 2^{39}.$$

2. (a) Il dominio di f è $D = \mathbb{R}$. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 2\,\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - 2\,\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} = 1\,,$$
la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

   (b) La derivata prima di f è data da
$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1)}{(1 + \mathrm{e}^{2x})^2}\,.$$

   (c) Si ha
$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1 \geq 0 \\ &\iff \quad \mathrm{e}^x \leq \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ \mathrm{e}^x \geq \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff \quad \mathrm{e}^x \geq \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff \quad x \geq \ln\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$
In particolare, si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pertanto, si ha un punto di minimo (assoluto) per $x_0 = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$. Inoltre, il valore minimo di f è
$$f(x_0) = \frac{1 - 2\,\mathrm{e}^{x_0}}{1 + \mathrm{e}^{2x_0}} = \frac{1 - 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

(d) Si ha $P_0 \equiv (0, f(0)) \equiv (0, -1/2)$ e $f'(0) = -1/2$. Pertanto, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto P_0 è

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 0) \qquad \text{ossia} \qquad x + 2y + 1 = 0\,.$$

(e) La funzione f è limitata superiormente dall'asintoto di equazione $y = 1$. Infatti, si ha $f(x) \leq 1$ sse $1 - 2\mathrm{e}^x \leq 1 + \mathrm{e}^{2x}$ sse $-2 \leq \mathrm{e}^x$, e questo è vero per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, f ammette 1 come estremo superiore. Inoltre, la funzione f ammette un punto di minimo in x_0 e $f(x_0) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f assume in x_0 un minimo assoluto. Essendo continua, f porta intervalli in intervalli. Quindi $\operatorname{Im} f = [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$. Di conseguenza, f è limitata.

(f) La funzione f è sempre negativa per ogni $x \geq 0$ (con anche $\lim_{x\to+\infty} = 0^-$) e ammette un minimo assoluto in $x_0 > 0$. Essendo continua, f porta intervalli in intervalli. Quindi $Y = f([0, +\infty)) = [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$. Inoltre, ammettendo un punto di minimo in $x_0 > 0$, la funzione f non può essere iniettiva e quindi non può essere invertibile.

(g) Consideriamo la funzione $F : [0, \ln 2] \to \mathbb{R}$, definita da $F(x) = f(x) + \mathrm{e}^{2x-1}$. La funzione F è continua (essendo somma di funzioni continue). Inoltre $F(0) = -1/2 + 1/\mathrm{e} = (2 - \mathrm{e})/2\mathrm{e} < 0$ (essendo $\mathrm{e} > 2$) e $F(\ln 2) = 4/\mathrm{e} - 3/5 > 0$ (essendo la prima frazione magggiore di 1 e la seconda minore di 1). Pertanto, per il teorema degli zeri, la funzione F possiede almeno uno zero nell'intervallo $[0, \ln 2]$, ossia l'equazione $f(x) + \mathrm{e}^{2x-1} = 0$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, \ln 2]$.

(h) Il grafico qualitativo di f è