POLITECNICO DI MILANO – INGEGNERIA INDUSTRIALE

ANALISI E GEOMETRIA 1 *Secondo compito in itinere – 16 Gennaio 2020*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

T.1: 4 punti	**Es.1**: 6 punti	**Es.2**: 6 punti	**Totale**

Prima parte

1. Dare la definizione di *primitiva* di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo.
2. Enunciare e dimostrare il *primo teorema fondamentale del calcolo integrale.*

Seconda parte

1. (a) Determinare la soluzione $y = f(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \dfrac{2t}{t^2-1}\, y(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

specificando l'intervallo più ampio (massimale) dove è definita.

(b) Stabilire la convergenza dell'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{|f(t)|^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

al variare del parametro reale $\alpha > 0$.

2. Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = t^2 \\ z = \frac{1}{2}\sin 2t \end{cases} \qquad t \in [-\sqrt{2}, 0].$$

(a) Stabilire se la curva γ è chiusa, semplice, regolare, rettificabile.

(b) Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \sqrt{y}\, \mathrm{d}s.$$

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $P_0 \in \gamma$, che si ottiene per $t = 0$, e ortogonale al piano $\pi : x - 3y + 2z - 3 = 0$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *90 minuti.*

Soluzioni

1. (a) L'equazione differenziale data è un'equazione lineare del primo ordine, dove i coefficienti

$$p(t) = \frac{2t}{t^2-1} \qquad \text{e} \qquad q(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

sono definiti e continui per $t \neq \pm 1$. L'intervallo massimale contenente $t_0 = 0$ in cui entrambi i coefficienti sono continui è $(-1,1)$. Pertanto, l'intervallo massimale su cui la soluzione de problema di Cauchy è definita è $I = (-1,1)$.
Poiché in un intorno di $t_0 = 0$ si ha $|t^2-1| = 1-t^2$, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{\int \frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}\left[\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-\int \frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + c\right] \\ &= \mathrm{e}^{\ln|t^2-1|}\left[\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-\ln|t^2-1|}\,\mathrm{d}t + c\right] \\ &= \mathrm{e}^{\ln(1-t^2)}\left[\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-\ln(1-t^2)}\,ddt + c\right] \\ &= (1-t^2)\left[\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + c\right] \\ &= (1-t^2)\left[\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + c\right] \\ &= (1-t^2)\,(\operatorname{artg} t + c) \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene $c = 0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy cercata è

$$f(t) = (1-t^2)\,\operatorname{artg} t.$$

(b) Sull'intervallo $[0,1]$ si ha $f(t) \geq 0$ e $f(t) = 0$ se e solo se $t = 0, 1$. Poiché

$$\begin{aligned} &f(t) \sim t && \text{e} && \frac{1}{f(t)^\alpha} \sim \frac{1}{t^\alpha} && \text{per } t \to 0^+ \\ &f(t) \sim 2\,\operatorname{artg} 1\,(1-t) && \text{e} && \frac{1}{f(t)^\alpha} \sim \frac{1}{(\pi/2)^\alpha}\,\frac{1}{(1-t)^\alpha} && \text{per } t \to 1^-, \end{aligned}$$

si ha che (per il criterio del confronto asintotico) la funzione $1/f(t)^\alpha$ è integrabile in senso improprio in un intorno destro di 0 quando $\alpha < 1$, ed è integrabile in senso improprio in un intorno sinistro di 1 quando $\alpha < 1$. Pertanto, l'integrale I converge per $\alpha \in (0,1)$.

2. Sia $f : [-\sqrt{2}, 0] \to \mathbb{R}^3$ la funzione, definita da $f(t) = \left(\cos^2 t, t^2, \frac{1}{2}\sin 2t\right)$, che parametrizza la curva γ.

(a) La curva γ non è chiusa poiché

$$f(-\sqrt{2}) = \left(\cos^2\sqrt{2}, 2, -\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{2}\right) \neq (1,0,0) = f(0).$$

Poiché la funzione $y(t) = t^2$ è iniettiva (essendo strettamente decrescente) sull'intervallo $[-\sqrt{2}, 0]$, anche la funzione f è iniettiva e la funzione γ è semplice. Inoltre, essendo $f'(t) = (-\sin 2t, 2t, \cos 2t)$, si ha

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 2t + 4t^2 + \cos^2 2t} = \sqrt{1+4t^2} \neq 0 \quad \forall t \in [-\sqrt{2}, 0].$$

Pertanto γ è regolare. Infine, essendo $f \in \mathcal{C}^1([-\sqrt{2}, 0])$, γ è rettificabile (e quindi ha lunghezza finita).

(b) Si ha

$$I = \int_\gamma \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{t^2}\,\|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{2}}^{0} |t|\,\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{8}\int_{-\sqrt{2}}^{0} 8t\,\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\,(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\sqrt{2}}^{0} = \frac{13}{6}.$$

(c) Le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $P_0 = f(0) = (1,0,0)$ e ortogonale al piano $\pi : x - 3y + 2z - 3 = 0$ è

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \\ z = 2t\,. \end{cases}$$