Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Primo appello – 3 Febbraio 2020*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

T.1: 5 punti	**T.2**: 3 punti	**Es.1**: 6 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 4 punti	**Totale**

Prima parte

1. (a) Dare la definizione di curva rettificabile nel caso del grafico di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
   (b) Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla lunghezza del grafico di una funzione.
2. (a) Dare la definizione di distanza tra un punto e un piano nello spazio ordinario.
   (b) Dimostrare la formula della distanza tra un punto e un piano nello spazio ordinario.

Seconda parte

1. (a) Determinare l'insieme A delle soluzioni dell'equazione
$$(z - 1 + 2\mathrm{i})^4 = (2 + \mathrm{i})^8$$
   e rappresentarlo nel piano di Gauss. Osservare che gli elementi di A si possono vedere come i vertici di un quadrato Q, e determinare il centro e il lato di Q.
   (b) Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme
$$Q' = \{w = \mathrm{i}\, z + 1 \ : \ z \in Q\}.$$
   Che relazione c'è tra Q e Q'?
2. Studiare qualitativamente la funzione integrale generalizzata
$$F(x) = \int_1^x \frac{(t^2 - 1)\ \mathrm{artg}\, t}{\sqrt[3]{(\mathrm{e}^t - 1)^4}}\, \mathrm{d}t$$
   (dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio), specificando l'insieme di definizione, la continuità, la derivabilità, la monotonia, gli estremi locali, i limiti agli estremi del dominio e gli asintoti, il grafico qualitativo.
3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{3}\, \mathrm{e}^{2x-3y} \\ y(1) = \dfrac{2}{3}\,. \end{cases}$$
4. (a) Determinare le equazioni parametriche della retta r ortogonale alle rette
$$s_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s_2 : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$
   e passante per il punto $A \equiv (1, 2, 3)$.
   (b) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $B \equiv (0, 0, 4)$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 40 minuti.*

---

1. (a) Poiché $(2+\mathrm{i})^2 = 4+4\mathrm{i}-1 = 3+4\mathrm{i}$, l'equazione si riduce a

$$(z-1+2\mathrm{i})^4 = (3+4\mathrm{i})^4$$

e questa equazione, essendo $3+2\mathrm{i} \neq 0$, si può scrivere come

$$\left(\frac{z-1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}\right)^4 = 1\,.$$

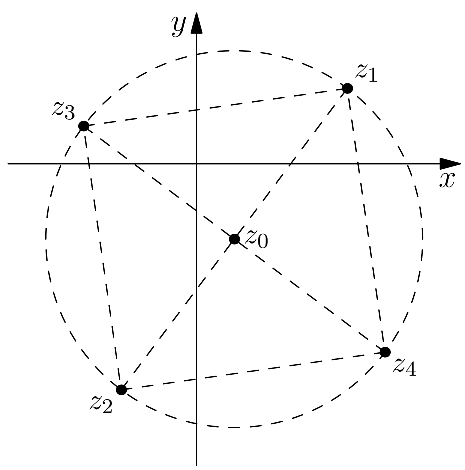
Poiché le radici quarte dell'identità sono ± 1 e $\pm\mathrm{i}$, si hanno le quattro soluzioni

$$\frac{z-1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} = \pm 1, \pm\mathrm{i}$$

ossia

$$\begin{aligned}
z_1 - 1 + 2\mathrm{i} &= 3+4\mathrm{i} & \qquad z_1 &= 4+2\mathrm{i}\\
z_2 - 1 + 2\mathrm{i} &= -3-4\mathrm{i} & \qquad z_2 &= -2-6\mathrm{i}\\
z_3 - 1 + 2\mathrm{i} &= 3\mathrm{i}-4 & \qquad z_3 &= -3+\mathrm{i}\\
z_4 - 1 + 2\mathrm{i} &= -3\mathrm{i}+4 & \qquad z_4 &= 5-5\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, si ha



Le soluzioni trovate si sono i vertici di un quadrato Q di centro $z_0 = 1-2\mathrm{i}$, poiché sono le radici quarte di un numero complesso (che si dispongono sempre nei vertici di un quadrato di centro l'origine) traslate di $1-2\mathrm{i}$. Infine, il lato di Q è dato, ad esempio, da

$$\mathbf{d}(z_1, z_3) = |z_1 - z_3| = |7+\mathrm{i}| = \sqrt{50}\,.$$

(b) Consideriamo la trasformazione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $F(z) = \mathrm{i}\,z + 1$. Questa trasformazione è una roto-traslazione. Più precisamente, si ha la rotazione di $\pi/2$, in senso antiorario, attorno all'origine, seguita dalla traslazione orizzontale di 1 verso destra.
Poiché

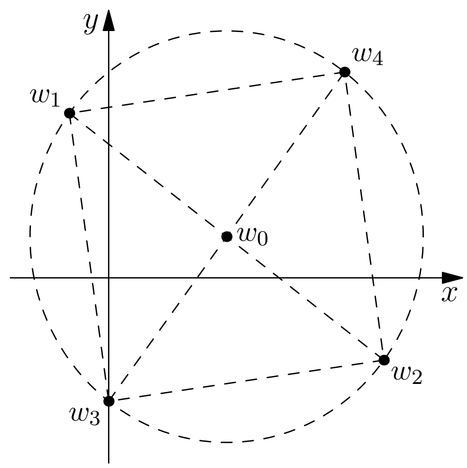
$$Q' = \{w = \mathrm{i}\,z + 1 \ : \ z \in Q\} = \{F(z) \ : \ z \in Q\} = F(Q)\,,$$

possiamo dire che Q' è il quadrato che si ottiene facendo ruotare Q di $\pi/2$, in senso antiorario, attorno all'origine, e poi traslando orizzontalmente di 1 verso destra il quadrato ottenuto.

Poiché Q' è un quadrato, esso è determinato dai suoi vertici, che sono

$$\begin{aligned}
w_1 &= F(z_1) = \mathrm{i}(4+2\mathrm{i}) + 1 = 4\mathrm{i} - 2 + 1 = -1 + 4\mathrm{i} \\
w_2 &= F(z_2) = \mathrm{i}(-2-6\mathrm{i}) + 1 = -2\mathrm{i} + 6 + 1 = 7 - 2\mathrm{i} \\
w_3 &= F(z_3) = \mathrm{i}(-3+\mathrm{i}) + 1 = -3\mathrm{i} - 1 + 1 = -3\mathrm{i} \\
w_4 &= F(z_4) = \mathrm{i}(5-5\mathrm{i}) + 1 = 5\mathrm{i} + 5 + 1 = 6 + 5\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, si ha



dove $w_0 = 3 + \mathrm{i}$.

2. (a) *Insieme di definizione e continuità*: la funzione integranda

$$f(t) = \frac{(t^2-1)\,\mathrm{artg}\,t}{\sqrt[3]{(\mathrm{e}^t-1)^4}}$$

è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quindi f è integrabile su ogni intervallo di $\mathbb{R}$ che non contenga $t = 0$. In un intorno di $t = 0$, si ha

$$f(t) \sim -\frac{t}{t^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{per } t \to 0\,.$$

Quindi f ìntegrabile in senso improprio in un intorno di $t = 0$. Pertanto, per il secondo teorema fondamentale del calcolo esteso alle funzioni integrali generalizzate, F è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

(b) *Derivabilità*: sempre per il secondo teorema fondamentale del calcolo esteso alle funzioni integrali generalizzate, abbiamo che la funzione F è derivabile in ogni punto di continuità di f con derivata $F'(x) = f(x)$. Quindi, si ha

$$F'(x) = \frac{(x^2-1)\,\mathrm{artg}\,x}{\sqrt[3]{(\mathrm{e}^x-1)^4}} \qquad \text{per } x \neq 0\,.$$

In $x = 0$, dove la funzione f non è definita, la funzione F presenta un punto cuspidale, essendo

$$\lim_{x\to 0^\pm} F'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = -\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \mp\infty\,.$$

(c) *Monotonia*: per le osservazioni precedenti, studiando gli zeri e il segno di $f(x)$ per $x \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
F'(x) = 0 &\qquad \text{se e solo se} \qquad x = \pm 1 \\
F'(x) > 0 &\qquad \text{se e solo se} \qquad -1 < x < 0\,,\ x > 1 \\
F'(x) < 0 &\qquad \text{se e solo se} \qquad x < -1\,,\ 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Pertanto la funzione F è crescente per $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$ ed è decrescente per $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$.

(d) *Estremi locali*: per quanto detto nel punto precedente, la funzione F presenta un punto di massimo per $x = 0$ e due punti di minimo in $x = \pm 1$. In particolare, essendo $F(1) = 0$, il secondo punto di minimo è $(1,0)$.

(e) *Limiti agli estremi del dominio e asintoti*: poiché la funzione F è definita su tutto $\mathbb{R}$, dobbiamo calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(t^2-1)\,\operatorname{artg} t}{\sqrt[3]{(\mathrm{e}^t-1)^4}}\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\int_{-\infty}^{1} \frac{(t^2-1)\,\operatorname{artg} t}{\sqrt[3]{(\mathrm{e}^t-1)^4}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Si tratta quindi di stabilire l'integrabilità in senso improprio di f a $+\infty$ e a $-\infty$. Poiché

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2}\,\frac{t^2}{\mathrm{e}^{\frac{4}{3}t}} = \left(\frac{\pi}{2}\,t^4\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t}\right)\frac{1}{t^2} \le \frac{1}{t^2} \qquad \text{definitivamente per } t \to +\infty\,,$$

la funzione f è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$. Questo significa che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = a \qquad a \in \mathbb{R}\,,\ a > 0\,,$$

ossia che $y = a$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Si può dimostrare che $a \approx 0.7$. Infine, poiché

$$f(t) \sim -\frac{\pi}{2}\,t^2 \to -\infty \qquad \text{per } t \to -\infty\,,$$

la funzione f non è integrabile in senso improprio in un intorno di $-\infty$ e quindi

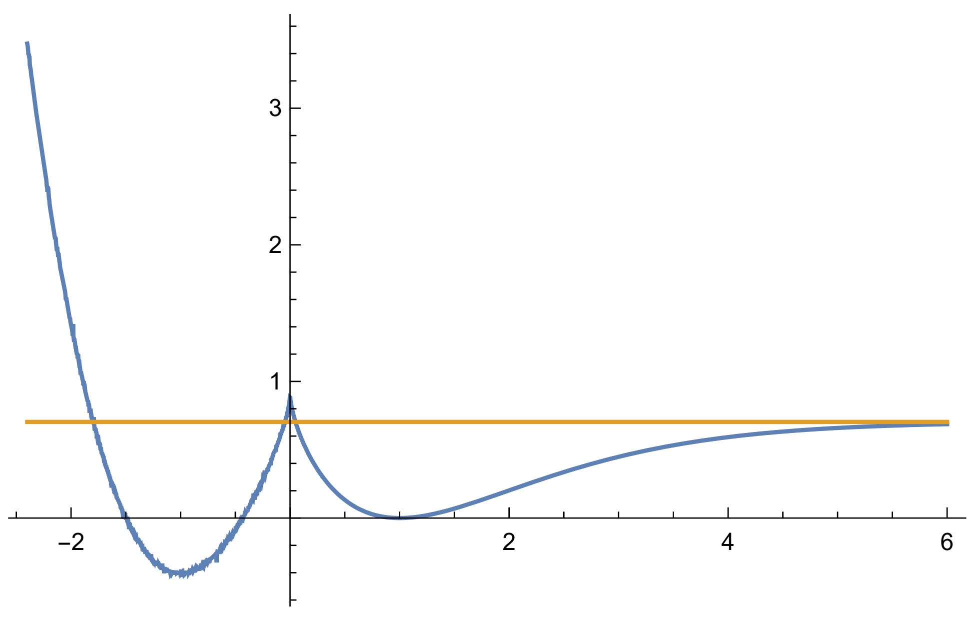
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty\,.$$

Inoltre, essendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} F'(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,,$$

la funzione F non possiede asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(f) *Grafico*:



3. L'equazione differenziale è a variabili separabili, con $a(x) = \frac{x^2}{3}\,\mathrm{e}^{2x}$ e $b(y) = \mathrm{e}^{-3y}$. Non ci sono soluzioni singolari. Separando le variabili, si ha

$$\int 3\,\mathrm{e}^{3y}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Il primo integrale è immediato. Il secondo integrale si ottiene integrando per parti due volte:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = x^2\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = x^2\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - x\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = x^2\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - x\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + c\,.$$

Pertanto, si ha

$$\mathrm{e}^{3y} = \frac{1}{4}\,(2x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x} + c$$

da cui si ottiene l'integrale generale

$$y(x) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\,(2x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x} + c\right) \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo la condizione $y(1) = \frac{2}{3}$, si ha

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^2 + c\right)$$

ossia $c = \frac{3}{4}\mathrm{e}^2$. Quindi, la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{(2x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^2}{4}\,.$$

4. (a) I parametri direttori delle rette s_1 ed s_2 sono dati, rispettivamente, dai vettori $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 5)$. Pertanto, essendo $r \perp s_1$ ed $r \perp s_2$, i parametri direttori della retta r sono dati dal vettore $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = (11, -9, -7)$. Pertanto, dovendo essere $A \in r$, si ha

$$r: \begin{cases} x = 1 + 11t \\ y = 2 - 9t \\ z = 3 - 7t\,. \end{cases}$$

(b) Il piano π ortogonale alla retta r e passante per il punto B ha equazione

$$11(x - 0) - 9(y - 0) - 7(z - 4) = 0$$

ossia

$$11x - 9y - 7z + 28 = 0\,.$$

Intersecando r con π, si ha

$$11(1 + 11t) - 9(2 - 9t) - 7(3 - 7t) + 28 = 0$$

ossia $t = 0$. Pertanto $r \cap \pi = A \equiv (1, 2, 3)$. Di conseguenza, si ha

$$\mathbf{d}(B, r) = \mathbf{d}(A, B) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{6}.$$