Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — *Quarto appello, 1° Settembre 2020*

Istruzioni. *Indicare le risposte corrette (ogni domanda ha solo una risposta esatta). Non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici, strumenti di calcolo simbolico e telefonini.*
Punteggi. *Ogni domanda vale 3 punti.*
Tempo. *1 ora.*

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Allora

(a) f è suriettiva
(b) f è iniettiva
(c) f è crescente
(d) f è invertibile

2. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Allora

(a) F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(b) F è derivabile e $F'(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(c) F è crescente
(d) F è invertibile

3. Se lo sviluppo di Taylor di ordine 5 di f in $x_0 = 0$ è

$$f(x) = 2 - x^2 + x^5 + o(x^5),$$

allora

(a) f ha un minimo locale in $x_0 = 0$
(b) f ha un massimo locale in $x_0 = 0$
(c) f ha un punto di flesso in $x_0 = 0$
(d) $x_0 = 0$ non è un punto critico per f

4. Sia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la trasformazione definita da $T(z) = \mathrm{i}\,z - 2$, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora

(a) T è una traslazione
(b) T è una rotazione di centro $C = 1 + 2\mathrm{i}$
(c) T è una rotazione di centro $C = -1 - \mathrm{i}$
(d) T non ha alcun punto fisso

5. Sia $f : \mathbb{R}\{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ per ogni $x \neq 0$. Allora

(a) $y = x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$
(b) $y = x + 1$ è un asintoto obliquo a $+\infty$
(c) non esiste alcun asintoto obliquo a $+\infty$
(d) $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$

6. Il valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2 + \mathrm{e}^{x^3} - 1}{2x^3}$$

è

(a) 0
(b) $+\infty$
(c) $1/2$
(d) $-1/2$

7. Sia $A = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z + \mathrm{i}| = |z - 2\mathrm{i}| \,\}$. Allora

(a) $1 + \mathrm{i} \in A$
(b) $\frac{\mathrm{i}}{2} \in A$
(c) $\frac{1}{2} \in A$
(d) tutte le soluzioni hanno parte reale uguale a zero.

8. Sia $y = y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Allora

(a) $y(x) = \frac{1}{x+3}$; intervallo massimale: $(-3, +\infty)$
(b) $y(x) = \frac{1}{x+3}$; intervallo massimale: $(-\infty, -3)$
(c) $y(x) = \frac{1}{3-x}$; intervallo massimale: $(-3, +\infty)$
(d) $y(x) = \frac{1}{3-x}$; intervallo massimale: $(-\infty, 3)$

9. Di piani passanti per i punti $A \equiv (1, 0, 0)$ e $B \equiv (0, 1, 0)$ e paralleli alla retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

(a) non ne esistono
(b) ne esiste uno e uno solo, di equazione $z = 0$
(c) ne esiste uno e uno solo, di equazione $x + y = 1$
(d) ne esistono infiniti

10. L'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x$$

(a) converge a $\ln\ln 2$
(b) converge a $\ln 2$
(c) converge a 0
(d) diverge a $+\infty$

Risposte

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Allora

(✗) f è suriettiva
(b) f è iniettiva
(c) f è crescente
(d) f è invertibile

2. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Allora

(✗) F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(b) F è derivabile e $F'(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(c) F è crescente
(d) F è invertibile

3. Se lo sviluppo di Taylor di ordine 5 di f in $x_0 = 0$ è

$$f(x) = 2 - x^2 + x^5 + o(x^5),$$

allora

(a) f ha un minimo locale in $x_0 = 0$
(✗) f ha un massimo locale in $x_0 = 0$
(c) f ha un punto di flesso in $x_0 = 0$
(d) $x_0 = 0$ non è un punto critico per f

4. Sia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la trasformazione definita da $T(z) = \mathrm{i}\,z - 2$, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora

(a) T è una traslazione
(b) T è una rotazione di centro $C = 1 + 2\mathrm{i}$
(✗) T è una rotazione di centro $C = -1 - \mathrm{i}$
(d) T non ha alcun punto fisso

5. Sia $f : \mathbb{R}\{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ per ogni $x \neq 0$. Allora

(a) $y = x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$
(✗) $y = x + 1$ è un asintoto obliquo a $+\infty$
(c) non esiste alcun asintoto obliquo a $+\infty$
(d) $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$

6. Il valore del limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2 + e^{x^3} - 1}{2x^3}$$

è

(a) 0
(b) $+\infty$
(✗) $1/2$
(d) $-1/2$

7. Sia $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 2i| \}$. Allora

(a) $1 + i \in A$
(✗) $\frac{i}{2} \in A$
(c) $\frac{1}{2} \in A$
(d) tutte le soluzioni hanno parte reale uguale a zero.

8. Sia $y = y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Allora

(a) $y(x) = \frac{1}{x+3}$; intervallo massimale: $(-3, +\infty)$
(b) $y(x) = \frac{1}{x+3}$; intervallo massimale: $(-\infty, -3)$
(c) $y(x) = \frac{1}{3-x}$; intervallo massimale: $(-3, +\infty)$
(✗) $y(x) = \frac{1}{3-x}$; intervallo massimale: $(-\infty, 3)$

9. Di piani passanti per i punti $A \equiv (1, 0, 0)$ e $B \equiv (0, 1, 0)$ e paralleli alla retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$$

(a) non ne esistono
(b) ne esiste uno e uno solo, di equazione $z = 0$
(c) ne esiste uno e uno solo, di equazione $x + y = 1$
(✗) ne esistono infiniti

10. L'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx$$

(a) converge a $\ln \ln 2$
(b) converge a $\ln 2$
(c) converge a 0
(✗) diverge a $+\infty$